

Ασκήσεις στις απόλυτες τιμές (και ανισώσεις)

(επιμέλεια Αιμίλιος Βλάχος)

1. Να χαρακτηρίσετε **Σωστό-Λάθος** τα παρακάτω:

- i) Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$, $\alpha, \beta \neq 0$ ii) Αν $\alpha > \beta > 0$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$, $\alpha, \beta \neq 0$
iii) $|\alpha| > 0$ για κάθε α πραγματικό iv) $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ για κάθε α πραγματικό
v) Αν $|x+1|=4$ τότε $d|x,1|=4$ vi) η εξίσωση $d|x,-1|=4$ επαληθεύεται για $x=5$
vii) η ανίσωση $d|x,-1| > 4$ επαληθεύεται για $x=5$ viii) $d|x,-1| + d|y,-1| = 0 \Rightarrow x=y=1$
ix) $|8-z|=|z-8|$ x) Αν α, β ομόσημοι τότε $|\alpha\beta| = \alpha\beta$
xi) Αν α, β ετερόσημοι τότε $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$

2. Αν $2 < \alpha < 3$ και $5 < \beta < 6$ τότε βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

i) $\alpha + \beta$ ii) $2\alpha - \beta$ iii) $\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta}$ iv) $\alpha^2 + \beta^2 - 4$ v) $|\alpha+1| + |\beta+1|$ vi) $|\alpha-1|^2 + |\beta-2|^2$

3. Αν $2 < x < y < 5$ τότε να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = |x-1| + |x-2| - |y-5| - |y-1| \quad B = |x+y-4| - |x+y-10|$$

4. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ και $\gamma < x < z$ τότε να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = \frac{|\alpha-\gamma| - |\beta-\alpha|}{|\gamma-\beta|} + \frac{|\alpha-\beta| + |\beta-\gamma|}{|\gamma-\alpha|} \quad B = \frac{|x-y| - |x-z| - |y-x|}{|x-z| + |x-y| - |y-x|}$$

5. Αν $\alpha < 1 < \beta$ τότε να δείξετε ότι

i) $|\alpha-2016| + |\beta| - |\alpha-\beta| = 2016$ ii) $\frac{|\alpha-1| + |\beta|}{|\beta-\alpha+1|} = 1$

6. Αν $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 4$ τότε να δείξετε ότι $|5x-3y| \leq 22$

7. Αν $|\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$ τότε να δείξετε ότι $(2\alpha\beta+1)^2 + (2\alpha\beta-1)^2 = 2$

8. Αν $|\alpha+\beta| \leq |\alpha-\beta|$, $\alpha, \beta \neq 0$ τότε να δείξετε ότι: $|\alpha\beta| + \beta\alpha = 0$ και $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$

9. Να δείξετε ότι $\alpha^2 + 2(\alpha+\beta) \geq -\beta^2 - 2$, πότε ισχύει σαν ισότητα;

10. Αν $\alpha^2 + 4(\alpha+\beta) \leq -\beta^2 - 8$ τότε να βρείτε τους α, β

11. Αν $|\alpha-\beta+1| + |\beta| = 0$ τότε να βρείτε τους α, β

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $|3-2x| = |2x-1|$ ii) $|\pi-3|x = |\pi-2|x+1$ iii) $|3-2x| = |x-1|$ iv) $|x^3| - |x| = 0$

13. Να δείξετε ότι:

i) $|\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}| \geq 2$ ii) $|x^2+1| + |-x^4-1| - 2+2x^3 \geq 0$

14. Δίνεται η $A = \frac{x^2-1}{|x|+1} + \frac{x^2-1}{|x|-1}$

i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ii) Βρείτε το x αν $A=4$