

## 1. Τίτλος: Οι κρυμμένοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

- **Συγγραφέας** Βλάστος Αιμίλιος
- **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών**: Τριγωνομετρία
- **Θέμα- Σκεπτικό της δραστηριότητας**.

• Η ιδέα πάνω στην οποία έχει στηριχτεί ο σχεδιασμός του σεναρίου γεννήθηκε όταν κατά την εισαγωγική παράδοση στο μάθημα Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας μιας μαθήτρια ρώτησε: που φαίνονται κύριε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στο τρίγωνο; Φυσικά είναι πολύ δύσκολο να δείξεις αλλά και να εξηγήσεις ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο εκτός από τις ορατές πλευρές και γωνίες, υπάρχουν κρυμμένοι αριθμοί (οι λόγοι των πλευρών που αντιστοιχούν σε οξείες γωνίες)

Η καινοτομία που εισάγεται με τη διδασκαλία του θέματος είναι η εμφάνιση αυτών των αριθμών στο τρίγωνο.

• **Προστιθέμενη αξία**. Το σενάριο αναδεικνύει συγκεκριμένες δράσεις οι οποίες δεν μπορούν να υλοποιηθούν με τα συμβατικά αναπαραστασιακά μέσα ενώ συγχρόνως αυτές οι δράσεις επεκτείνουν τους γνωστικούς ορίζοντες του μαθητή. Η προστιθέμενη αξία του σεναρίου από παιδαγωγική σκοπιά είναι ότι ο μαθητής με την βοήθεια του λογισμικού έχει την δυνατότητα να χειριστεί δυναμικά ένα τρίγωνο να διαπιστώσει χωρίς να μετράει κάθε φορά και να διαιρεί ότι υπάρχει ένας λόγος σταθερός (τριγωνομετρικός αριθμός) που αντιστοιχεί σε μια οξεία γωνία. Κατόπιν ο μαθητής βλέπει ότι υπάρχουν και άλλοι τέτοιοι αριθμοί, οπότε αναπόφευκτα αναρωτιέται πόσοι είναι, υπάρχει η ανάγκη να τους ξεχωρίζουμε άρα να τους δώσουμε όνομα, συμμετέχοντας έτσι ενεργά στην αναζήτηση των κρυμμένων αριθμών.

• **Καινοτομία: α)** Με την παρούσα δραστηριότητα διδάσκονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί (εφαπτομένη, συνημίτονο, ημίτονο) καθώς και οι συμμεταβολές τους σε μία διδακτική ώρα, σε αντίθεση με την κατανομή του αναλυτικού προγράμματος σε διαφορετικές παραγράφους. Αυτό δεν σημαίνει ότι η μία ώρα αυτής της δραστηριότητας καλύπτει τις ώρες διδασκαλίας του αναλυτικού προγράμματος. Ο ενιαίος τρόπος διδασκαλίας όλων των τριγωνομετρικών αριθμών έρχεται να σταθεροποιήσει την έννοια των λόγων των πλευρών του τριγώνου **σαν αριθμούς που υπάρχουν σε ένα τρίγωνο** και την σύνδεσή τους με μια οξεία γωνία. Μετά την δραστηριότητα αυτή ο καθηγητής με τους μαθητές μπορούν να κάνουν τις εφαρμογές και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου ανά παράγραφο αλλά και τυχαία. Επίσης γίνεται η δυνατότητα να γίνουν εφαρμογές και μέσα από αυτή τη δραστηριότητα αλλά θα απαιτηθεί μία ακόμη διδακτική ώρα.

β) Η παρούσα δραστηριότητα στην Δ' φάση εισάγει ένα γράφημα που είναι πρόδρομος της γραφικής παράστασης των τριγωνομετρικών αριθμών. Με αυτή την αναπαράσταση επιχειρείται να συνδεθεί η μεταβολή ενός τριγωνομετρικού αριθμού, με την μεταβολή της γωνίας

γ) Γίνεται η σύνδεση του πραγματικού κόσμου με τα μαθηματικά. Υπάρχει μια προσομοίωση του σχήματος σαν ένας δρόμος που ένα αυτοκίνητο τον ανεβαίνει και ένα μέρος της δραστηριότητας αναφέρεται στη κλίση. Επιπλέον αίρεται η εσφαλμένη αντίληψη ότι δεν υπάρχει (θεωρητικά) κλίση 100%. Οι περισσότεροι θεωρούν ότι στην κλίση 100% ο δρόμος- ευθεία είναι κατακόρυφη.

• **Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα** Η έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού αρχίζοντας από τον ορισμό, δεν δίνει στον μαθητή την στέρεα αίσθηση ότι είναι ένας αριθμός. Ο μαθητής δυσκολεύεται αρκετά να κατανοήσει τι είναι λόγος. Έτσι με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας αποστηθίζει κάποιους ορισμούς χωρίς να αντιλαμβάνεται τι είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί και πως αυτοί φαίνονται στο τρίγωνο. Μαθαίνει απλά να κοιτά τους τριγωνομετρικούς πίνακες που υπάρχουν στις τελευταίες σελίδες του βιβλίου του ή να τους βρίσκει με μια επιστημονική αριθμομηχανή του Η-Υ ή του κινητού του. Βέβαια και αυτή η δεξιότητα είναι καλή, καλύτερα όμως να γίνεται αφού γνωρίσει ενεργά το θεωρητικό πλαίσιο που αφορά αυτούς τους αριθμούς.

## 2. Πλαίσιο εφαρμογής.

- **Σε ποιους απευθύνεται**: Σε μαθητές της Β Γυμνασίου
- **Χρόνος υλοποίησης**. Τρεις (3) διδακτικές ώρες

- **Χώρος υλοποίησης.** οι μαθητές θα εργαστούν εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών, ή στην αίθουσα με τον διαδραστικό πίνακα
- **Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών.**  
Το απαιτούμενο γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών είναι : Το ορθογώνιο τρίγωνο, ή έννοια της οξείας γωνίας, οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες . Η επίλυση εξισώσεων με την μέθοδο χιαστί .
- **Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:** Φύλλο εργασίας , το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας geogebra και οι Η-Υ.
- **Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης.** οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των 4 ατόμων, οι ρόλοι των μαθητών είναι να προβούν στις μαθησιακές δράσεις που προκύπτουν από το φύλλο εργασίας και να εμπλακούν στις αλληλεπιδραστικές δράσεις με το λογισμικό, με τους συμμαθητές τους και με τον διδάσκοντα. Οι αναμενόμενες διδακτικές παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού είναι περισσότερο ο συντονισμός των φάσεων της δραστηριότητας και οι επεξηγήσεις που θα δώσει στους μαθητές
- **Στόχοι της δραστηριότητας**
  - α) Διδακτικοί:** Αναφέρονται παρακάτω στην ανάλυση της δραστηριότητα
  - β) Παιδαγωγικοί:** Το παρόν σενάριο δημιουργεί μαθησιακό περιβάλλον που εμπλέκει μαθητές, λογισμικό, καθηγητή. Η αλληλεπίδραση αυτή έχει δύο διαστάσεις. Η πρώτη αφορά στην αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού, μαθητών με μαθητές, εκπαιδευτικών με εκπαιδευτικούς. Η δεύτερη αφορά στην αλληλεπίδραση των χρηστών με την πληροφορία και τη διαχείρισή της μέσω των ΤΠΕ.
- **Ανάλυση της δραστηριότητας.**

Ερωτήσεις φύλλου εργασίας	Διδακτικοί στόχοι.	Μαθησιακές Δράσεις (τι αναμένεται από μαθητή/ομάδα να κάνει μαζί με εκπαιδευτικό και τα υπολογιστικά μέσα)	Αναμενόμενες διδακτικές παρεμβάσεις
<p style="text-align: center;"><b>Α' φάση:</b></p>			

Κινείστε το δρομέα για το σημείο Α. Τι παρατηρείτε;	Οι μαθητές να αποκτήσουν κινητικές δεξιότητες, να παρατηρήσουν, να εικάσουν	Οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι αλλάζει το τρίγωνο, ότι αλλάζουν οι πλευρές, η Β παραμένει σταθερή, οι άλλες γωνίες θα συζητήσουν αν παραμένουν σταθερές ή αλλάζουν.	Στο δυναμικό σχήμα της εφαρμογής η Β παραμένει σταθερή, ενώ οι άλλες αλλάζουν μεν, αλλά παραμένουν ίσες. Οι μαθητές γνωρίζουν από την Α τάξη για τις γωνίες που ορίζονται από 2 παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία. Αν χρειαστεί μπορεί να ζητηθεί οι μαθητές σχεδιάσουν και τρίτη παράλληλη.
Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι στις πλευρές κάτι παραμένει σταθερό;	Να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι ο λόγος της απέναντι κάθετης προς την υποτείνουσα είναι σταθερός, εφόσον η γωνία Β παραμένει σταθερή.	Να αναρωτηθούν πώς μπορεί να γίνει αυτό. Να κάνουν διάφορες πράξεις με αυτούς τους αριθμούς	Είναι δύσκολο να παρατηρήσουν ότι ο λόγος παραμένει σταθερός, γιατί αυτό δεν φαίνεται, είναι κρυμμένο θέλει πράξεις. Για τον λόγο αυτό δίνουμε στους μαθητές τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν την αριθμομηχανή. Επίσης μπορούμε να αφήσουμε το λογισμικό να δείχνει το λόγο.

Κινείστε το σημείο Κ	Να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι ο λόγος της απέναντι κάθετης προς την υποτείνουσα είναι σταθερός για κάθε γωνία Β στο ορθογώνιο τρίγωνο, να μάθουν να ορίζουν τον αριθμό αυτό	Να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι η γωνία Β αλλάζει και μαζί με αυτή και ο λόγος.	Θα ειπωθεί ότι τελικά σε οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο, για οποιαδήποτε οξεία γωνία Β, υπάρχει ένας κρυμμένος τριγωνομετρικός αριθμός. Τώρα θα διατυπωθεί ο ορισμός για αυτόν τον αριθμό. Υπάρχει και αντίστοιχο κουτί στο λογισμικό για τον ορισμό της εφαπτομένης
----------------------	--	--	---

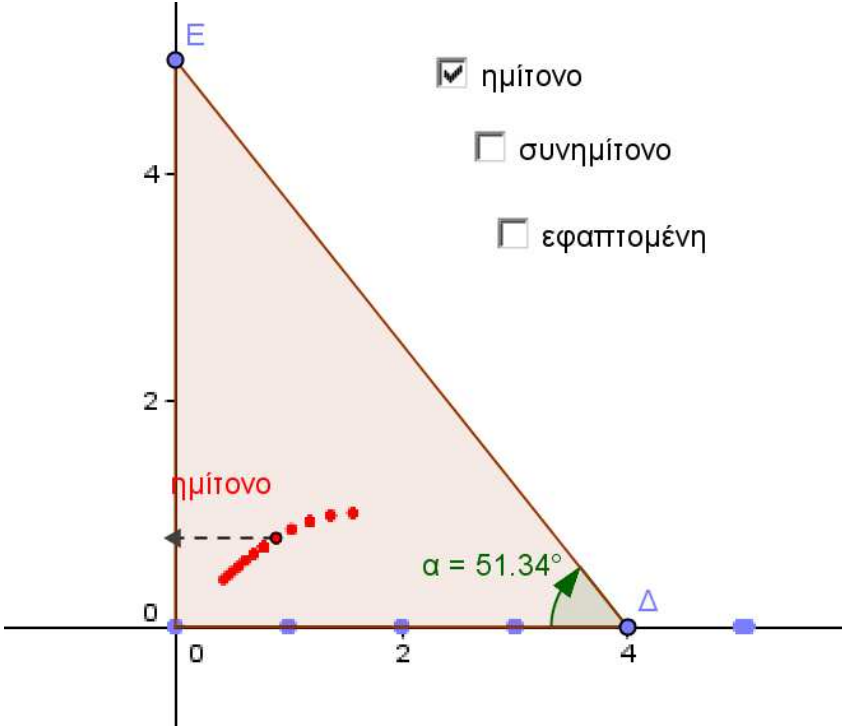
### **Β' φάση:**

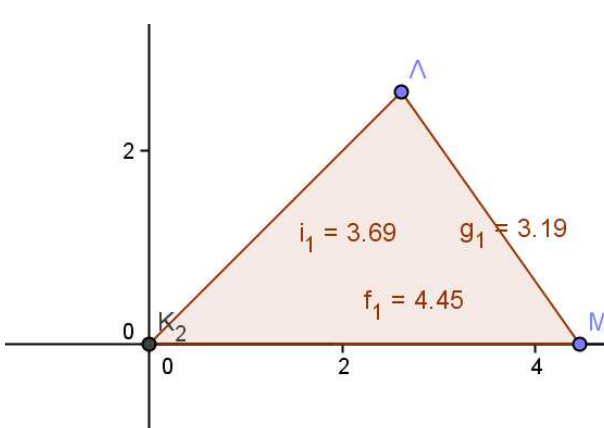
Όμοιες ερωτήσεις με αυτές τις Α φάσης	Να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι υπάρχει και άλλος τριγωνομετρικός αριθμός κρυμμένος, αρκεί να αλλάξουμε τους λόγους, να μάθουν να ορίζουν τον αριθμό αυτό	όμοια	Εδώ η διαδικασία θα είναι πιο γρήγορη αφού τα περισσότερα είναι όμοια με την Α φάση. Όμως θα είναι μεγάλη η ικανοποίηση να βλέπεις τους μαθητές να ανακαλύπτουν και νέο τριγωνομετρικό αριθμό, το συνημίτονο της Β
---------------------------------------	--	-------	--

### **Γ' φάση:**

Όμοιες ερωτήσεις με αυτές τις Α φάσης	Να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι υπάρχει και άλλος τριγωνομετρικός αριθμός κρυμμένος, αρκεί να αλλάξουμε τους λόγους, να μάθουν να ορίζουν τον	Λογικά κάποιοι μαθητές θα αναρωτηθούν πόσοι τριγωνομετρικοί αριθμοί (κρυμμένοι) υπάρχουν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο; Αν δεν γίνει η ερώτηση αυτή θα πρέπει ο καθηγητής να την κάνει. Τότε μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν τόσοι τριγωνομετρικοί αριθμοί	Εδώ η διαδικασία θα είναι πιο γρήγορη αφού τα περισσότερα είναι όμοια με την Α φάση. Όμως θα είναι μεγάλη η ικανοποίηση να βλέπεις τους μαθητές να ανακαλύπτουν και νέο τριγωνομετρικό αριθμό, το ημίτονο της Β.
---------------------------------------	--	--	--

	αριθμό αυτό	οξείας γωνίας όσοι και οι διαφορετικοί λόγοι στις πλευρές του ορθογωνίου. Εμείς ασχολούμαστε με τους αξιοσημείωτους τριγωνομετρικούς αριθμούς.	
--	-------------	--	--

<p style="text-align: center;"><b>Δ' φάση:</b></p> 			
Κινείστ ε τον δρομέα Δ. Πως μεταβά λλεται η γωνία Δ; και πως αντίστο ιχα ο κάθε τριγωνο μετρικό ς αριθμός ;	Να κατανοήσουν οι μαθητές ότι όταν <b>μεγαλώνει ή μικραίνει</b> η οξεία γωνία Δ τότε οι δύο τριγωνομετρικοί αριθμοί ημΔ , εφΔ <b>μεγαλώνουν, μικραίνουν</b> αντίστοιχα, ενώ ο τρίτος τριγωνομετρικός αριθμός συνΔ <b>μικραίνει, μεγαλώνει</b> αντίστοιχα.	Αρχικά κινώντας το δρομέα οι μαθητές βλέπουν να αυξομειώνε ται η γωνία Δ. Κατόπιν θα αναρωτηθού ν πως γίνεται να καταλάβουν πως μεταβάλλον ται οι τριγωνομετρ ικοί αριθμοί αφού δεν τους βλέπουν.	Ο καθηγητής προτρέπει τους μαθητές να κάνουν κλικ σε κουτί που έχει το όνομα του τριγωνομετρικού αριθμού. Τότε θα εξηγηθεί ότι ο τριγωνομετρικός αριθμός έχει αποτυπωθεί στον άξονα των τεταγμένων, ενώ η γωνία Δ στον άξονα των τετμημένων. Αφού γίνουν αντιληπτές οι συμμεταβολές γωνίας και τριγωνομετρικών αριθμών, τότε ο καθηγητής προτρέπει στους μαθητές να εμφανίσουν το ίχνος του σημείου, οπότε κινώντας πάλι τον δρομέα (δίνονται οι οδηγίες σαν κείμενο στο λογισμικό) θα πάρουν ένα γράφημα. Από το γράφημα αυτό που σημειωτέον <b>είναι αποτέλεσμα της δραστηριότητας του μαθητή μαζί με το λογισμικό</b> οι μαθητές μπορούν να επαληθεύσουν τις εικασίες τους για τις συμμεταβολές. Επίσης μπορεί ο καθηγητής να αναφέρει ότι το γράφημα αυτό είναι ο πρόδρομος της γραφικής παράστασης των τριγωνομετρικών αριθμών που θα διδαχθούν στην Α λυκείου. Σε άλλο μάθημα στην τάξη ο καθηγητής θα ζητήσει από τους μαθητές να δούνε τους τριγωνομετρικούς πίνακες και να τους ζητήσει να

			επαληθεύσουν τις συμμεταβολές γωνίας και τριγωνομετρικών αριθμών που έμαθαν μέσω του λογισμικού.
<p style="text-align: center;"><b>Ε' φάση:</b></p> 			
Κινείστε το σημείο Λ. Τι παρατηρείται;	Να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στο τυχαίο τρίγωνο κανείς λόγος δεν είναι σταθερός, οπότε οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών που δόθηκαν στις προηγούμενες φάσεις ισχύουν αποκλειστικά σε ορθογώνιο τρίγωνο.	Να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι κινώντας το Λ η γωνία Ν παραμένει σταθερή και ότι ο λόγος της απέναντι πλευράς με την απέναντι δεν είναι σταθερός.	Εδώ ο καθηγητής έρχεται να δώσει στους μαθητές να κατανοήσουν ότι όταν δίνουμε τον ορισμό ενός τριγωνομετρικού αριθμού, αυτός ο ορισμός απαιτεί την προϋπόθεση του ορθογωνίου τριγώνου. Βέβαια οι τριγωνομετρικοί αριθμοί κάθε γωνίας υπάρχουν. Φέρνοντας το ύψος από το Λ ή το Μ σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι λόγοι των πλευρών ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
<p style="text-align: center;"><b>ΣΤ' φάση:</b></p>			
Στις φάσεις 1, 2, 3 να πατήσετε το κουτί με το όνομα εφαρμογή και να βρείτε την άγνωστη πλευρά.	Να εμπεδώσουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών. Να μάθουν να τους χρησιμοποιούν για να βρίσκουν άγνωστες πλευρές στο ορθογώνιο τρίγωνο	Οι μαθητές κινούν το Α ή το Κ και λύνουν τις εξισώσεις που προκύπτουν χωρίς την βοήθεια του λογισμικού. Απλά χρησιμοποιούν τον πίνακα ή ένα χαρτί που δίνεται μαζί με το φύλλο εργασίας	Μετά την λύση μιας εξίσωσης ο καθηγητής πάει σε κάθε ομάδα, απενεργοποιεί το κουτί εφαρμογή και μαζί με τους μαθητές βλέπουν την λύση.

3. **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:** α) Οι πληροφορίες που αντλεί ο εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της εφαρμογής της δραστηριότητας αξιοποιούνται για ανατροφοδότηση του σεναρίου. Για παράδειγμα το παρόν σενάριο αναθεωρήθηκε δύο φορές μετά την πρώτη εφαρμογή στη τάξη.  
 β) Κάνουμε μετά το τέλος της δραστηριότητας κατάλληλες ερωτήσεις ώστε να δούμε αν επιτεύχθηκαν κυρίως οι μαθησιακοί στόχοι που θέσαμε.

4. **Επέκταση της δραστηριότητας.** Μεταξύ Α και Β φάσης ή στο τέλος της δραστηριότητας, κάνουμε μάθημα με την κλίση.

Βλάστος Αιμίλιος Μαθηματικός



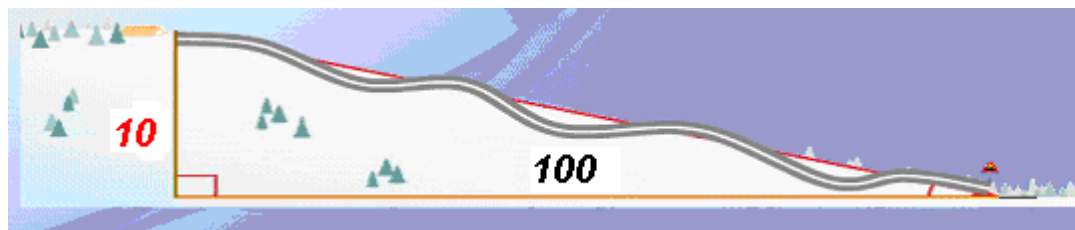
Ρωτούμε τους μαθητές ποια πινακίδα συναντάμε σε ανηφορικό δρόμο.

Στην φάση 1 υπάρχει το κουμπί **κλίση** και ζητάμε από τους μαθητές να το ενεργοποιήσουν, να θέσουν σε κίνηση ένα αυτοκίνητο που ανεβαίνει το δρόμο.

Αρχικά αφήνουμε την κλίση (εμφανίζεται στο λογισμικό) να είναι 10% ώστε να υπάρχει σύνδεση με τη πραγματικότητα.

Ρωτάμε τους μαθητές ο αριθμός αυτός (κλίση) που υπάρχει σε όλο το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύξαμε πριν. Ο σκοπός μας είναι να τον συσχετίσουν με τον τριγωνομετρικό αριθμό εφαπτομένη.

Ρωτάμε τους μαθητές να εξηγήσουν το παρακάτω σχήμα:



Σκοπός μας είναι ότι: **σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10m.**

Ζητάμε από τους μαθητές να μας πουν πόσο μπορεί να είναι η κλίση η πραγματική ενός δρόμου (γίνονται εκτιμήσεις) και πόσο μπορεί να είναι στο μοντέλο που βλέπουμε. Σκοπός μας είναι να αρθεί η αντίληψη που έχει ο περισσότερος κόσμος ότι δεν υπάρχει κλίση 100% (Αν ρωτήσουμε τους μαθητές από πρίν πιστεύουν ότι είναι κατακόρυφη ευθεία.)

Κάνουμε επίσης μια μικρή συζήτηση για αρνητικές κλίσεις.

##### 5. **Βιβλιογραφία :** επιμορφωτικό υλικό EAITY για την επιμόρφωση Β επιπέδου.