Άσκηση στους μιγαδικούς
(κινητά σημεία)

Δύο κινητά σημεία **P και Π** κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο ώστε την τυχαία χρονική στιγμή $t \geq 0$ βρίσκονται στα σημεία που είναι αντίστοιχα εικόνες των μιγαδικών
$z(t)=t+\pi+i(t-\pi)$ και $w(t)=\pi\eta\mu t+(\pi+\pi\sigma\upsilon\nu t)i$

α) Να δείξετε ότι το **P** κινείται πάνω σε μια ημιευθεία ε της οποίας βρείτε την εξίσωση και να βρείτε την χρονική στιγμή t_1 που το **P** απέχει από την αρχή του μιγαδικού επίπεδου την μικρότερη απόσταση.

β) i) Να δείξετε ότι το **Π** κινείται πάνω σε κύκλο **C** του οποίου βρείτε την εξίσωση και τα στοιχεία του.

ii) Βρείτε την χρονική στιγμή $t_2 \in [0,2\pi)$ που το **Π** απέχει από την αρχή του μιγαδικού επίπεδου την μικρότερη απόσταση

iii) Βρείτε την χρονική στιγμή $t_3 \in [0,2\pi)$ που το **Π** απέχει από την αρχή του μιγαδικού επίπεδου την μεγαλύτερη απόσταση

γ) Να δείξετε ότι $|z(t_1)-w(t_1)|^2-|z(t_2)-w(t_2)|^2=6\pi^2$

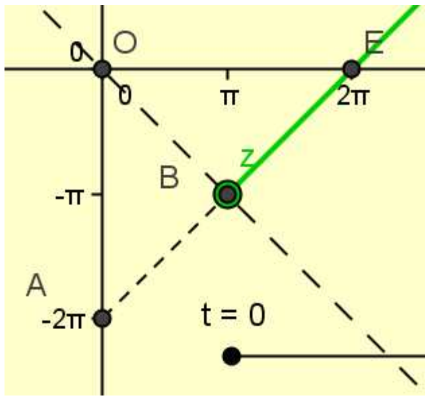
δ) Να δείξετε ότι οι τροχιές των δύο κινητών σημείων δεν θα συναντηθούν . Επίσης να βρείτε την μικρότερη απόστασή τους **ΓΔ** όπου Γ , Δ αντίστοιχα κατάλληλα σημεία στον κύκλο **C** και στην ημιευθεία **ε**

ε) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τυχαία χρονική στιγμή t ώστε $|z(t)-w(t)|=Γ Δ$

Λύση

α) Για το κινητό **P** είναι: $\chi=t+\pi$,$\psi=t-\pi$ οπότε με απαλοιφή του t $\psi=\chi-2\pi$ (ημιευθεία ε με αρχή Β διότι $t \geq 0$).

Το τρίγωνο ΟΕΑ (σχήμα1) είναι ισοσκελές οπότε **Β(π,-π)** δηλαδή $z(t_1)=\pi-\pi i$ οπότε
$t_1+\pi=\pi$ άρα $t_1=0$

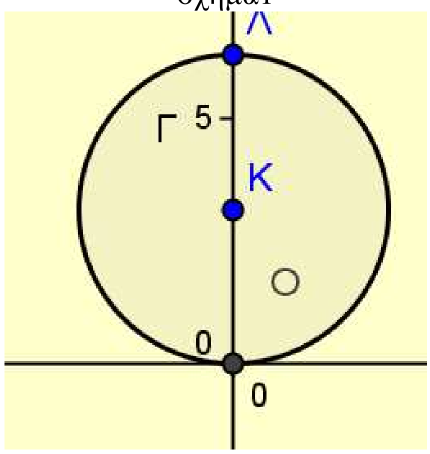


σχήμα1

β) i) Για το κινητό **Π** είναι: $\chi=\pi\eta\mu t$, $\psi=\pi+\pi\sigma\upsilon\nu t$, οπότε $\eta\mu t=\chi/\pi$ και $\sigma\upsilon\nu t=(\psi-\pi)/\pi$ και επειδή $\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t=1$ τότε $\chi^2+(\psi-\pi)^2=\pi^2$ που είναι κύκλος με **Κ(0,π) και ρ=π**

ii) Από το σχήμα2 είναι φανερό ότι το **Π** απέχει από την αρχή του μιγαδικού επίπεδου την μικρότερη απόσταση όταν ταυτίζεται με την αρχή Ο(0,0), τότε $\chi=\pi\eta\mu t_2=0$ **και** $\pi+\pi\sigma\upsilon\nu t_2=0$ **οπότε** $t_2=\pi$

iii)Από το σχήμα2 είναι φανερό ότι το **Π** απέχει από την αρχή του μιγαδικού επίπεδου την μεγαλύτερη απόσταση όταν ταυτίζεται με το Λ(2π,0), τότε $\chi=\pi\eta\mu t_3=0$ και $\psi=\pi+\pi\sigma\upsilon\nu t_3=\pi$ οπότε $t_3=0$



σχήμα2

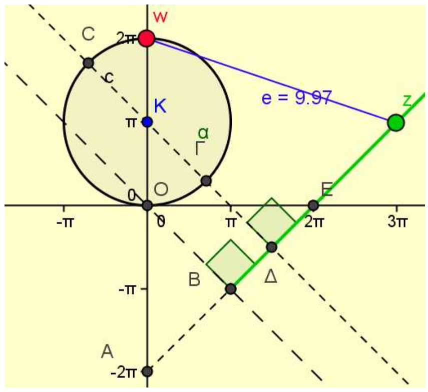
γ) $|z(t_1)-w(t_1)|^2=|z(0)-w(0)|^2=|\pi-\pi i-2\pi i|=10\pi^2$

$|z(t_2)-w(t_2)|^2=|z(\pi)-w(\pi)|^2=|2\pi|^2=4\pi^2$ οπότε

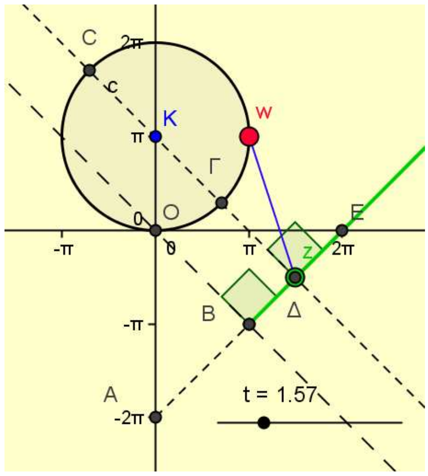
$|z(t_1)-w(t_1)|^2-|z(t_2)-w(t_2)|^2=6\pi^2$

δ) Η απόσταση **ΚΔ** υπολογίζεται από την απόσταση του Κ από την **ε** και είναι d= $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$

οπότε ΓΔ=d-ρ=$\frac{(3\sqrt{2}-2)\pi}{2}$



ε) Θα βρούμε το Δ και ποια χρονική στιγμή το κινητό Ρ βρίσκεται εκεί. Η ΚΔ διέρχεται από το Κ(0,π) , είναι παράλληλη της ΟΒ : ψ=-χ άρα η εξίσωση της ΚΔ είναι: **ψ= -χ+π** , επίσης το Δ ανήκει στην ε**: ψ=χ-2π** , άρα **Δ(3π/2,-π/2)**
τότε **χ= t+π=3π/2** οπότε **t=π/2**
Εκείνη τη στιγμή **w=π+πi** που η εικόνα του δεν ανήκει στην
ΚΔ: ψ= -χ+π αφού δεν την επαληθεύει άρα η εικόνα του w δεν είναι το Γ. Επομένως τα κινητά Ρ και Π δεν μπορούν την ίδια στιγμή να βρεθούν στα Γ ,Δ αντίστοιχα



Η παραπάνω άσκηση δημιουργήθηκε με διερεύνηση στο λογισμικό Geogebra
Βλάστος Αιμίλιος
Μαθηματικός στο Μουσικό Σχολείο Καρδίτσας
Επιμορφωτής στις ΤΠΕ
Την υλοποίηση της άσκησης με το λογισμικό μπορείτε να δείτε στο http://users.sch.gr/aistos