

Βασικό Επίπεδο στο Modellus

Το λογισμικό Modellus επιτρέπει στον χρήστη να οικοδομήσει μαθηματικά μοντέλα και να τα εξερευνήσει με προσομοιώσεις, γραφήματα, πίνακες τιμών.

Ο χρήστης πρέπει να γράψει τις εξισώσεις, να διερμηνεύσει το μοντέλο να ορίσει τιμές στις μεταβλητές. Μπορεί να δει τα αποτελέσματα σε γραφικό περιβάλλον ή σε πίνακες

Για να κατασκευάσετε ένα μοντέλο:

1. Γράψτε μία ή περισσότερες εξισώσεις στο παράθυρο Μοντέλο

Πχ. $y=2 \cdot t^2+t-1$

πχ. $z=a \cdot t^2+b \cdot t+c$

Πχ.

Προεπιλεγμένη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το t , τα a, b, c είναι παράμετροι με αρχικές τιμές 0. Οι μεταβλητές y, z είναι εξαρτημένες. . Οι

μεταβλητές y, z οι παράμετροι a, b, c και το t εμφανίζονται με πράσινη πλάγια γραφή, ενώ οι σταθερές με κανονική.

Πατήστε το κουμπί

Διερμηνεία . ένα

μήνυμα πληροφορεί **Το**

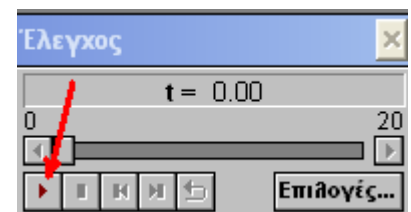
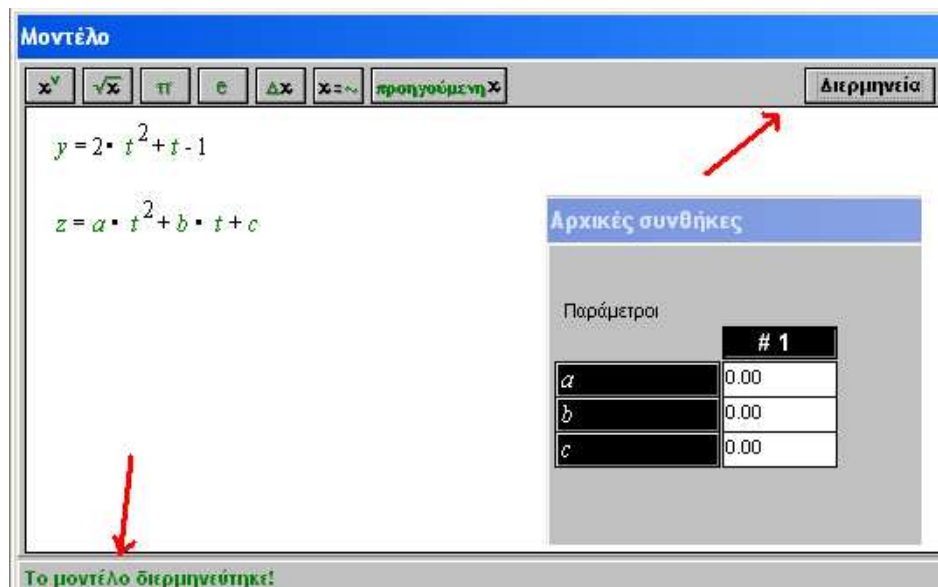
μοντέλο διερμηνεύτηκε (δηλαδή κατασκευάστηκε)

2. Στο παράθυρο Αρχικές συνθήκες εμφανίζονται οι παράμετροι, στις οποίες a, b, c δώσουμε τιμές 1, 1 και 0

3. Για να εκτελέσετε το μοντέλο πατήστε το κουμπί εκκίνησης στο παράθυρο έλεγχος. Το t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή με διάστημα ορισμού $[0, 20]$ και βήμα 0.1 τα οποία μπορούμε να αλλάξουμε. Προφανώς δεν βλέπουμε κάτι άλλο, γιατί δεν ζητήσαμε έξοδο.

Παρατήρηση

Αν κάνετε οποιαδήποτε αλλαγή στο παράθυρο μοντέλο πρέπει να κάνετε ξανά διερμηνεία.



Για να δείτε την έξοδο ενός μοντέλου

Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα **Γράφημα** έναν **Πίνακα τιμών** ή μια **Παρουσίαση** από το μενού **Παράθυρο**

1) **Γράφημα**. Στο παράθυρο αυτό μπορούμε να απεικονίσουμε οποιαδήποτε μεταβλητή ή παράμετρο με τη μορφή γραφήματος.

α) Ξεκινήστε με **Παράθυρο/νέο γράφημα** (Μπορείτε να έχετε μέχρι 3 διαφορετικά γραφήματα)

β) Μπορείτε να απεικονίσετε διαφορετικές γραφικές παραστάσεις αρκεί να επιλέξετε γράμματα για τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. πειραματιστείτε όσο θέλετε.

Αφήστε στον οριζόντιο το γράμμα t , αν θέλετε να δείτε περισσότερες γραφικές παραστάσεις, σύρετε με το ποντίκι σας περισσότερα γράμματα πχ. t, y, z . Αν θέλετε να επιλέξετε γράμματα που δεν είναι συνεχόμενα τότε κρατήστε πατημένο το πλήκτρο **Ctrl** και επιλέξτε με το ποντίκι τα γράμματα που θέλετε. Στο παραπάνω σχήμα βλέπετε ταυτόχρονα τις αναπαραστάσεις των ζευγών $(t,t), (t,y), (t,b)$.

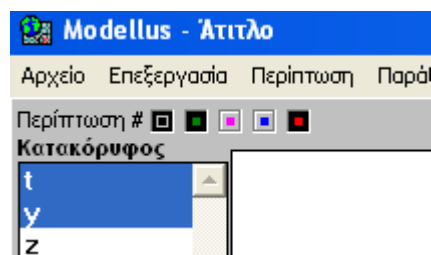
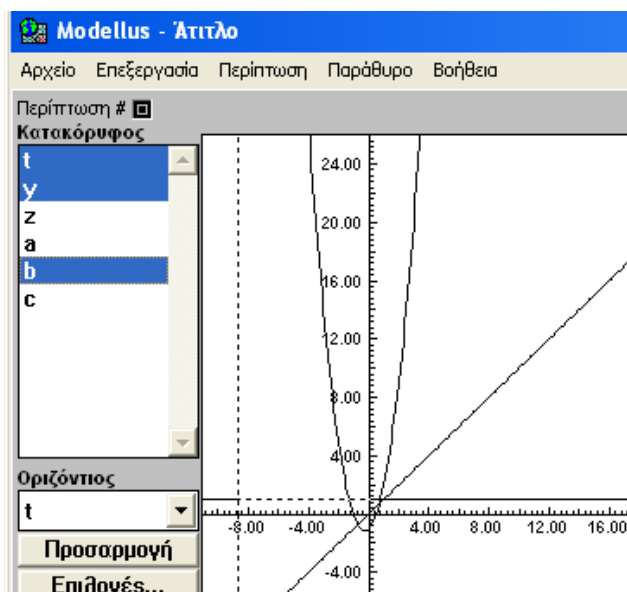
Αν θέλετε να έχετε αλλαγές στο σύστημα αξόνων σας πατήστε τα κουμπιά **Προσαρμογή** (για ορθοκανονικό σύστημα) και **Επιλογές** για max-min αξόνων κλπ.

γ) **Γραφικές παραστάσεις των παραμετροποιημένων γραφικών παραστάσεων.**

Η μεταβλητή z έχει στον τύπο της παραμέτρους a, b, c με αρχικές τιμές 1, 1, και 0 Αυτή είναι μια περίπτωση 1

Μπορούμε να έχουμε μέχρι και 5 περιπτώσεις.

Πατήστε από το αρχικό μενού **Περίπτωση/προσθήκη** κάθε φορά και δώστε στις παραμέτρους διαφορετικές τιμές. Στο γράφημα εμφανίζεται μια σειρά έγχρωμων κουμπιών που κάθε ένα αντιστοιχεί σε μια περίπτωση. Έτσι πατώντας τα κουμπιά παίρνετε το γράφημα με τις αντίστοιχες τιμές των περιπτώσεων.



2) **Πίνακας τιμών**

Πατήστε **Παράθυρο/νέος πίνακας τιμών** οπότε εμφανίζεται ο πίνακας τιμών που μπορεί να έχει τις τιμές από όποιο γράμμα θέλετε και από όποια περίπτωση παραμέτρου θέλετε. Θυμηθείτε σύρσιμο ποντικιού και επιλογή γραμμάτων (για επιλογή συνεχόμενων γραμμών) ή πατημένο

	t	y
t		
y	18.90	732.32
z	19.00	740.00
a	19.10	747.72
b	19.20	755.48
c	19.30	763.28
	19.40	771.12
	19.50	779.00

το πλήκτρο Ctrl και κλικ στα γράμματα που θέλετε (για επιλογή μη συνεχόμενων γραμμάτων)

Μην ξεχνάτε να κάνετε εκκίνηση από το παράθυρο έλεγχος.

Μπορείτε να ανοίξετε μέχρι και 3 παράθυρα πίνακα τιμών.

Μπορείτε να αντιγράψετε τις τιμές ενός πίνακα και να τις επικολλήσετε σε φύλλο excel ή σε ένα έγγραφο Word

3) Παρουσίαση

Πατήστε **Παράθυρο/νέα παρουσίαση**

κατακόρυφη στήλη

Πατώντας στην κατακόρυφη στήλη μπορείτε να προσθέσετε ένα αντικείμενο (πχ. σωματίδιο, διάνυσμα, στάθμη κτλ.) Για να είναι ενεργά τα εργαλεία της στήλης αυτής πρέπει στο παράθυρο έλεγχος να είμαστε στην αρχή.

οριζόντια γραμμή

Πατώντας στην οριζόντια γραμμή εργαλείων μπορείτε να χρησιμοποιήσετε εργαλεία μέτρησης. Το Modellus μπορεί και μετράει

Υπάρχουν μέτρηση γωνίας, απόστασης δύο σημείων, μήκους, συντεταγμένων, εμβαδού

Κάντε κλικ σε ένα από αυτά σύρετε το ποντίκι και τελειώστε με δεξιά κλικ. Κατόπιν μπορείτε να τα μετακινήσετε όπου θέλετε. Τα εργαλεία αυτά είναι ενεργά σε όλη κατάσταση και να είναι το παράθυρο έλεγχος.

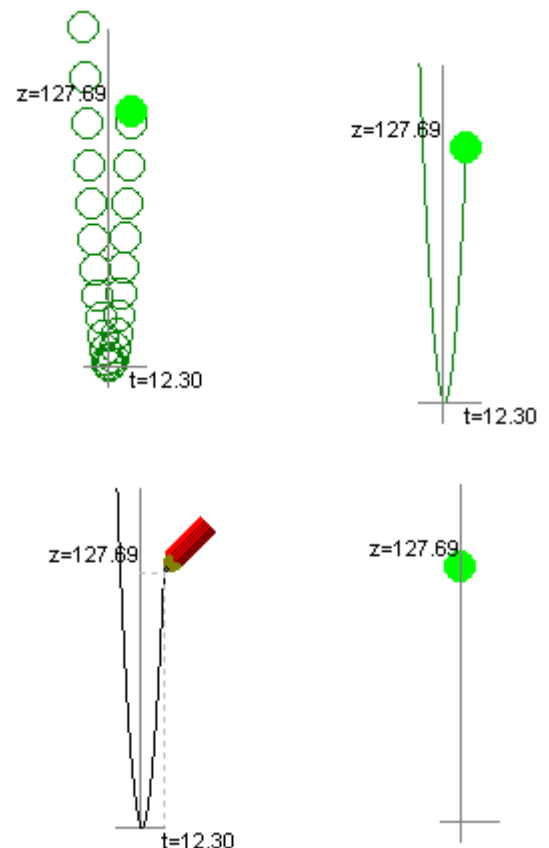
Ας επιλέξουμε την δημιουργία νέου

σωματιδίου. Κάντε κλικ στο εικονίδιο σωματίδιο(δεύτερο από την κατακόρυφη στήλη).

Κάντε τις παρακάτω ενέργειες: (Μην ξεχνάτε να κάνετε εκκίνηση από το παράθυρο έλεγχος).

α) Επιλέξτε 0 (σταθερά) για τον οριζόντιο άξονα και z για τον κατακόρυφο, έτσι θα δείτε μια μπάλα να κινείται κατακόρυφα προσομοιώνοντας την κίνηση της τεταγμένης του z

β) Επιλέξτε 0 (σταθερά) για τον κατακόρυφο άξονα και z για τον οριζόντιο, έτσι θα δείτε μια μπάλα να κινείται οριζόντια προσομοιώνοντας την κίνηση της τεταγμένης του z αλλά με οριζόντια κίνηση.



γ) Επιλέξτε t για τον οριζόντιο άξονα και z για τον κατακόρυφο, έτσι θα δείτε μια μπάλα να κινείται διαγράφοντας την τροχιά της καμπύλης της z . Αν θέλετε μπορείτε να εμφανίσετε και την τροχιά ή τα ίχνη της μπάλας.

δ) **Επιλέξτε δημιουργία νέας γραφίδας** (έκτο από την κατακόρυφη στήλη) και κάντε κάποια από τις προηγούμενες επιλογές αξόνων.

Μπορείτε να προσομοιώνετε ταυτόχρονα και το σωματίδιο και την γραφίδα, μπορείτε επίσης να έχετε περισσότερα σωματίδια και περισσότερες γραφίδες. Επίσης πειραματιστείτε και με την κλίμακα.

Παρατήρηση

Το κάθε στοιχείο της κατακόρυφης στήλης μπορείτε να το μετακινείτε, να το επεξεργάζεστε όταν στο παράθυρο του ελέγχου η μεταβλητή t έχει κάνει όλη τη διαδρομή της. Τότε το ποντίκι γίνεται σταυρός και το μετακινούμε ή με δεξιά κλικ κάνουμε επεξεργασία. (πχ στο σωματίδιο για να κρύψουμε τον άξονα ή να αφαιρέσουμε τροχιά ή να προσθέσουμε ίχνος κλπ.)

ε) **Δείκτης στάθμης, αναλογικός μετρητής, ψηφιακός μετρητής**

Μας δίνουν την εξέλιξη των τιμών μιας μεταβλητής.

ζ) Στην κατακόρυφη στήλη υπάρχουν ακόμα η **εισαγωγή εικόνας, η δημιουργία κειμένου, και η δημιουργία γεωμετρικού αντικειμένου**.

Μεταβολέας στο Modellus

Γράψτε μια νέα σχέση $x=b*t$ στο παράθυρο μοντέλο και πατήστε διερμηνεία.. Στο παράθυρο Παρουσίαση ή σε νέα παρουσίαση δημιουργείτε νέο σωματίδιο ή προσαρμόστε ένα παλιό ώστε στον κατακόρυφο να έχετε 0 και στον οριζόντιο b . Η τετμημένη ελέγχεται πλέον από την παράμετρο b . Δημιουργείτε μια νέα γραφίδα με οριζόντιο άξονα το t και κατακόρυφο το x . Ενώ εκτελείτε το μοντέλο μετακινείτε το σωματίδιο b . (Ο δείκτης του ποντικιού γίνεται χέρι) Κατασκευάστηκε ένα είδος μεταβολέα. Έτσι έχετε την δυνατότητα να βλέπετε την σχεδίαση μιας ευθείας και την ταυτόχρονη μεταβολή της κλίσης της.

ΣΕΝΑΡΙΟ : Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΤΡΕΝΩΝ

Στην αρχή ο διδάσκων θέτει στους μαθητές το εξής πρόβλημα: «Δύο ευθύγραμμες σιδηροτροχιές τέμνονται σχηματίζοντας ορθές γωνίες. Δύο τρένα κινούνται ταυτόχρονα προς το σημείο τομής των σιδηροτροχιών. Το ένα έχει ξεκινήσει από κάποιο σταθμό που απέχει 40 χιλιόμετρα από το σημείο τομής, και το άλλο από κάποιο σταθμό που απέχει 50 χιλιόμετρα από το ίδιο σημείο. Το πρώτο τρένο έχει ταχύτητα 800 μέτρα ανά λεπτό και το δεύτερο 600 μέτρα ανά λεπτό.»

Σε πόσα λεπτά μετά την αναχώρησή τους θα έχουν οι αμαξοστοιχίες την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους; Υπολογίστε τη συγκεκριμένη απόσταση» (Από το βιβλίο του Yakov Perelman «Διασκεδαστικά Μαθηματικά» Μέρος 2: Άλγεβρα, εκδόσεις Κάτοπτρο, 2001).

Η όλη διαδικασία μπορεί να διακριθεί σε στάδια της μοντελοποίησης.

Η προσπάθεια των μαθητών να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα

Προτρέπουμε τους μαθητές να προσομοιώσουν τις κινήσεις των δύο τρένων.

Αυτό θα γίνει με το παράθυρο παρουσίαση και το εργαλείο του νέου σωματιδίου

Πρέπει πρώτα να εκφράσουμε με εξισώσεις την οριζόντια και κατακόρυφη κίνηση του κάθε τρένου

Τους βοηθάμε ενώνοντας τα δύο σωματίδια ώστε να λειτουργεί σαν σύστημα αξόνων και να βλέπουν την κίνηση ταυτόχρονα, προσομοιώνοντας την πραγματική.

Αφήνουμε τους μαθητές να πειραματιστούν με τις κινήσεις ώστε τα δύο τρένα να πλησιάζουν στο ίδιο σημείο ,όχι όμως και να συγκρουστούν.

Πρέπει να γράψουν $x = +50 - 0.6 \cdot t$, $y = +40 - 0.8 \cdot t$ και για να πετύχουμε την

κατακόρυφη κίνηση βάζουμε 0 στον κατακόρυφο και χ στον οριζόντιο

Επίσης βάζουμε 0 στον οριζόντιο και y στον κατακόρυφο

Τα σωματίδια τα ενώνουμε χωρίς να τα συνδέσουμε

Ένα από τα ερωτήματα που θα απασχολήσουν τους μαθητές είναι ο χρόνος που θα βάλουν στο παράθυρο έλεγχος. Μπορούν κάθε στιγμή να αλλάζουν τον χρόνο στο παράθυρο έλεγχος, άλλωστε τα δύο τρένα κινούνται συνεχώς και πριν η απόσταση να γίνει ελάχιστη και μετά.

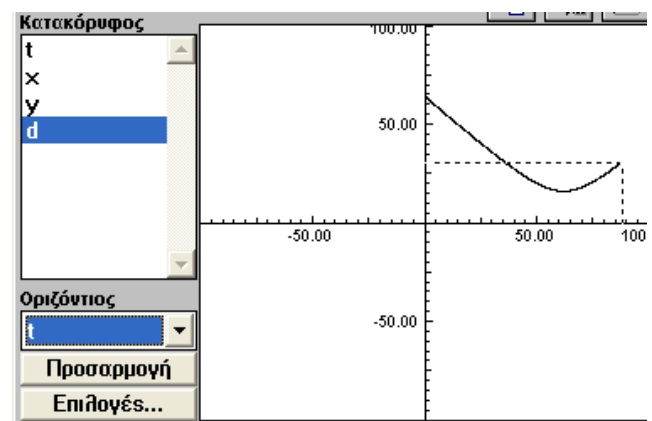
Στη συνέχεια υπολογίζουν την απόσταση

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ερμηνεύουν ξανά το μοντέλο.

Από το παράθυρο γράφημα επιλέγουμε t στον οριζόντιο, d στον κατακόρυφο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το ελάχιστο παρουσιάζεται για $t=60-65$



Στο παράθυρο πίνακας τιμών φαίνεται ότι το ελάχιστο $d=16$ παρατηρείται για $t=62$

t	d
12.00	52.50
14.00	50.60
...	...
54.00	17.89
56.00	17.09
58.00	16.49
60.00	16.12
62.00	16.00
64.00	16.12
66.00	16.49
68.00	17.09
70.00	17.89
72.00	18.87
74.00	20.00

Λύνουμε την άσκηση και με τον παραδοσιακό τρόπο.

$$x = 50 - 0.6t$$

$$y = 40 - 0.8t$$

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$ οπότε μετά από πράξεις παίρνουμε την εξίσωση

$$t^2 - 124t + 4100 - d^2 = 0 \text{ από όπου υπολογίζεται το } t.$$

Αφού η d οφείλει να είναι θετική θα πρέπει $d^2 - 256 > 0$ ή κατ' ελάχιστον $d^2 - 256 = 0$

Βρίσκουμε $d = 16$ και $t = 62$.