

Σημειώσεις



- Παράδειγμα1:..... Ευθεία και παραβολή σε ένα πρόβλημα
- Παράδειγμα 2:..... Χρήση του παραθύρου "Αριθμομηχανή"
- Παράδειγμα 3 :το πρόβλημα της πίτσας
- Παράδειγμα4 : ταυτότητες
- Παράδειγμα 5 : πρόοδοι
- Παράδειγμα6: Παράγωγος αριθμός
- Παράδειγμα7 :Γράφημα

Παράδειγμα 1

Το σκεπτικό:

Έστω $l=2k-1$ $p=k^2-1$ είναι οι τιμές πώλησης ενός προϊόντος από δύο διαφορετικές εταιρείες και k είναι μια μεταβλητή (πχ. χρόνος σε ημέρες) Υποθέτουμε ότι η μία εταιρεία εξαγοράζει την άλλη οπότε δημιουργεί μια νέα συνάρτηση για την πώληση την $m=(l+p)/2$ που είναι μια παραβολή. Η εταιρεία αναζητά **αντί της m μια νέα συνάρτηση γραμμική** που να αντιπροσωπεύει όσο το δυνατόν καλύτερα την m

Αρχίζουμε με το παράθυρο πίνακα

Στην πρώτη γραμμή βρίσκονται τα x, y μέσα σε μαύρους κύκλους τα οποία μετακινούνται και δηλώνουν κάθε φορά ποια είναι η τετμημένη και ποια η τεταγμένη όταν θα στείλουμε σημεία στο παράθυρο γράφημα..(Αποστολή σημεία σε γράφημα).

Στην δεύτερη γραμμή γράφουμε την μεταβλητή k στην οποία παρακάτω δίνουμε τιμές 1,2,3.

Τις τιμές 1,2,3 τις εισάγουμε κάθε μία χωριστά ή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή **Πίνακας /γέμισμα**

Δίνουμε και τις μεταβλητές $l=2k-1$ $p=k^2-1$. καθώς και τον μέσο όρο τους $m=(l+p)/2$. Άμεσα ενημερώνονται οι στήλες 2,3,4 με βάση τις τιμές της k στήλης

k	$l=2k-1$	$p=k^2-1$	$m=(l+p)/2$	s	q	$t=abs(s-m)$	Σt	r=abs(q-m)	Σr
1	1	0	0.5	0.44	0.88	0.06	0.06	0.38	0.38
2	3	3	3	2.88	3.02	0.12	0.18	0.02	0.4
3	5	8	6.5	5.32	5.22	1.18	1.36	1.28	1.68

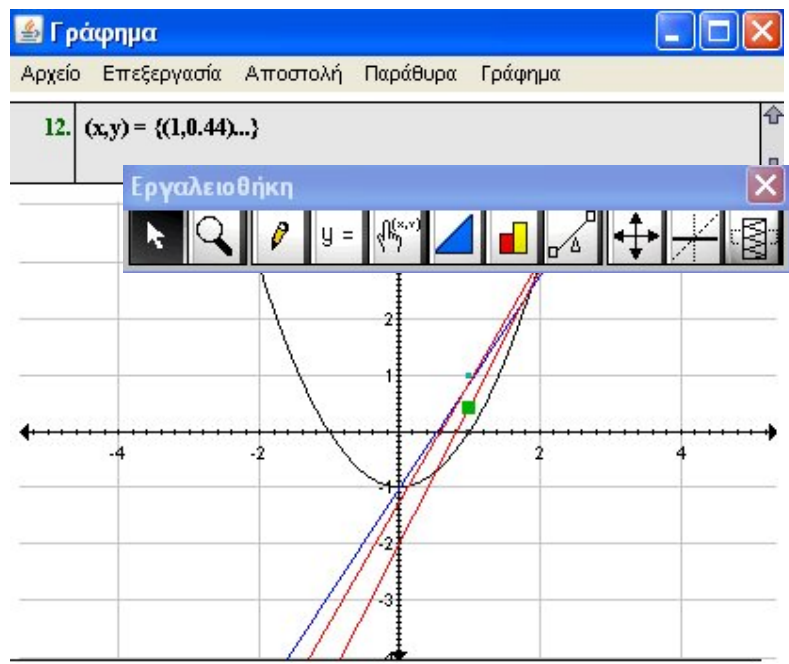
Στην τρίτη γραμμή αν θέλουμε δίνουμε επεξηγήσεις το τι είναι το καθένα πχ πώληση σε ευρώ

Στο παράθυρο γράφημα


Τοποθετούμε τα x, y ώστε να αντιστοιχούν στα k, l και κάνουμε **Αποστολή σημεία σε γράφημα**.

Αν δεν φαίνονται τα σημεία πρέπει να αλλάξουμε την κλίμακα και το πλέγμα για τα x, y

Βλάστος Αμιήλιος Μαθηματικός




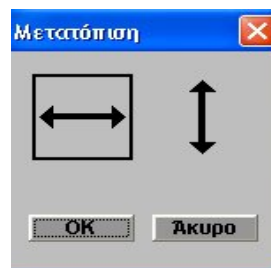
ΓΡΑΦΗΜΑ/ΑΛΛΑΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ


Από την εργαλειοθήκη (θα φανεί όταν το παράθυρο του γραφήματος δεν είναι μεγιστοποιημένο) παίρνουμε το εργαλείο  για να σχεδιάσουμε γραφικές παραστάσεις.

Σχεδιάζουμε λοιπόν αυτές που είναι στον πίνακα.
Μπορούμε να γράψουμε $y=2*x-1$, $y=x^2-1$ η και $l=2k-1$ $p=k^2-1$ αρκεί στη συνέχεια να ορίσουμε αυτά τα γράμματα σαν μεταβλητές.

Θέλουμε να βρούμε μια γραμμική συνάρτηση που να αντιπροσωπεύει τον μέσο όρο τους.

Μετατόπιση κλικ στη γραφική παράσταση και στο εικονίδιο  Με την μετατόπιση η γραφική παράσταση δεν «χαλάει»



Αυξομείωση κλικ στη γραφική παράσταση και στο εικονίδιο  Με την Αυξομείωση η γραφική παράσταση «χαλάει»



Πληκτρολογούμε την $y=x$ και με μετασχηματισμούς (παίρνουμε κατάλληλα εργαλεία από την εργαλειοθήκη)

και μετά επιλέγουμε οριζόντια ή κατακόρυφη.

προσπαθούμε να πετύχουμε μια αντιπροσωπευτική ευθεία.

Ας κάνουμε τελικά δύο ευθείες, και να βρούμε με την βοήθεια του λογισμικού ποια είναι η πλέον κατάλληλη.

Με το γράφημα κατασκευάσαμε τις δύο ευθείες.

Βλάστος Αμίλιος Μαθηματικός

Επιλέγουμε την κάθε μία, **ΑΠΟΣΤΟΛΗ/ ΤΥΠΟΣ ΩΣ ΚΟΥΜΠΙ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΗ** οπότε δημιουργούμε ένα κουμπί για την κάθε μία στην αριθμομηχανή.

Στο παράθυρο αριθμομηχανή

Πληκτρολογούμε 1 και μετά το κουμπί G1 . Επιλέγουμε κενό κελί σε μια κενή στήλη στον πίνακα (κλίκ στο χώρο μετά τις τρεις γραμμές του πίνακα) και στέλνουμε την τιμή αυτή στον πίνακα , κάνουμε το ίδιο για τις τιμές 2, 3 η και περισσότερες .

Το ίδιο για το κουμπί G2

Ονομάζουμε τις στήλες με μεταβλητές s , g .

Κατόπιν βρίσκουμε τις διαφορές κατά απόλυτη τιμή των τιμών από την πραγματική ενδιάμεση τιμή m , γράφοντας $t=abs(m-s)$

Αθροίζουμε τις διαφορές αυτές

Κάνουμε ένα κλίκ στην στήλη με τις τιμές που μας ενδιαφέρουν (στήλη t) , παίρνουμε το εργαλείο **ΠΙΝΑΚΑΣ/ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗ.**, αφήνουμε αρχική τιμή 0, αυτό ενεργεί σαν αθροιστής (Αθροίζει όπως η αθροιστική συχνότητα δηλ. κάθε νέα τιμή με το άθροισμα όλων των προηγούμενων)

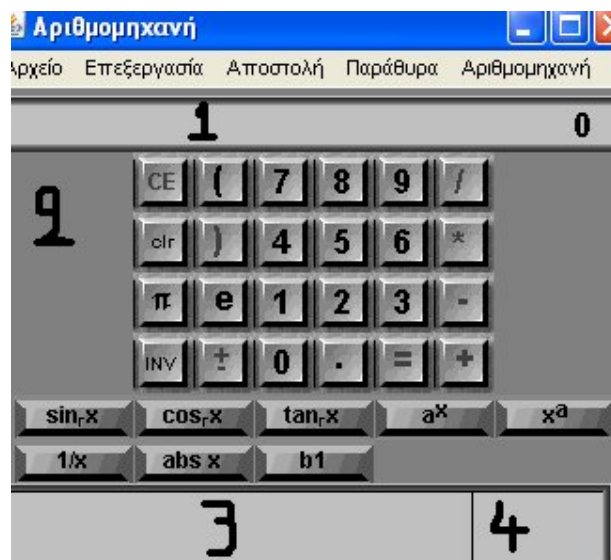
Κάνουμε το ίδιο για την g . Γράφουμε $r=abs(m-g)$ και μετά συσσώρευση τιμών.

Έτσι μπορούμε να βρούμε ποια από τις δύο ευθείες ήταν η πιο αντιπροσωπευτική (μικρότερη συσσώρευση)

Παράδειγμα 2 Χρήση του παραθύρου "Αριθμομηχανή"

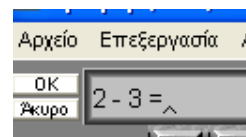
1). Με τα πλήκτρα που είναι στην περιοχή 2 (πληκτρολόγιο οθόνης) η από το πληκτρολόγιο εισάγουμε αριθμούς και πράξεις. Πχ:

- $32*3=$ θα δώσει 96. Στην περιοχή 3 (πλαίσιο καταγραφής αποτελεσμάτων) θα εμφανιστεί $32*3=$ και στην 4 (πλαίσιο εμφάνισης) το 96
- π και το ενσωματωμένο πλήκτρο $\cos x$ θα δώσει -1
- $7-3$ **Enter** και μετά $-2*4=$ θα δώσει την τιμή της παράστασης $7-3-2*4$



δηλαδή -4

2) Αν κάνουμε ένα κλικ στην περιοχή 3 ενώ υπάρχει μια παράσταση τότε εμφανίζονται στην περιοχή 1 δύο κουμπιά το OK και το Άκυρο και δίπλα ένα σημάδι \square που παίζει τον ρόλο του δρομέα. Αν πατήσουμε το άκυρο η περιοχή 1 μένει κενή. **Το OK ενεργοποιείται όταν πατήσουμε =**



και πατώντας το, εκτελείται η πράξη που ζητάμε. Αμέσως μετά η αριθμομηχανή παίρνει την αρχική της μορφή.

Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε ολόκληρη ή μέρος μιας παράστασης της περιοχής 3

Η περίπτωση αυτή είναι κατάλληλη για την γραφή και υπολογισμό παραστάσεων, ένα σημάδι \square δείχνει κάθε φορά την θέση που θα εισαχθεί ένα ψηφίο ή ένας τελεστής.

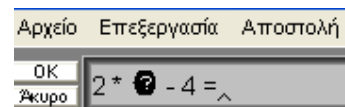
3) ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΗ/ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΟΥΜΠΙΟΥ



Η παραπάνω περίπτωση είναι κατάλληλη επίσης για την δημιουργία ενσωματωμένου πλήκτρο-κουμπιού.

έστω έχουμε γράψει στην περιοχή 1 τα πλήκτρα πράξη $2*3=$, αμέσως εμφανίζεται η παράσταση αυτή στην περιοχή 3, **την επιλέγουμε** και αυτή μεταφέρεται στην περιοχή 1.

Παίρνουμε το εργαλείο **Αριθμομηχανή/ κατασκευή κουμπιού** Αμέσως εμφανίζεται ένα κουμπί με ερωτηματικό στην περιοχή 2



Είμαστε στην περιοχή 1 και επιλέγουμε τον αριθμό 3, κατόπιν πατάμε το κουμπί με το ερωτηματικό

Αν πατήσουμε = **και το OK** τότε δημιουργείται ένα πλήκτρο- συνάρτησης $2x-4$ με όνομα **b1** (μπορούμε να αλλάξουμε το όνομά του) το οποίο ενσωματώνεται στα υπάρχοντα πλήκτρα.

Η χρήση του

Πατώντας px το 2 και μετά το κουμπί **b1** η αριθμομηχανή θα δώσει τιμή 0

Αυτό είναι ένα πολύ καλό εργαλείο για μαθητές Γυμνασίου για τον μηχανισμό της συνάρτησης, όπου δίνοντας μια τιμή ένας **μηχανισμός-συνάρτηση** δίνει μια άλλη αντίστοιχη τιμή.

Π.χ. Διδάσκουμε το πρόβλημα

Ένα ταξί χρεώνει 5 Ευρώ την σημαία του(ταρίφα) και 2 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο,

βάζουμε τους μαθητές να βρουν την αξία για 1, 2, 3, 4, 12, 25 χιλιόμετρα.

Θα κάνουν όλες αυτές τις πράξεις και θέλουμε να αντιληφθούν ότι στην περιοχή 3 εμφανίζονται παραστάσεις που έχουν ίδιους όρους εκτός από έναν.

Προτείνουμε να δημιουργήσουν ένα κουμπί που να κάνει αυτό τις πράξεις αντί για μας. Έτσι αντιλαμβάνονται καλύτερα τον μηχανισμό και τον ρόλο της συνάρτησης, σε τύπο που παράγει τιμές αν δεχθεί αντίστοιχα τιμές.

4). Ορισμός αντιστρόφου

Η αριθμομηχανή έχει και κουμπιά για την αντίστροφη λειτουργία των κουμπιών. Αυτό γίνεται με το πλήκτρο **INV**

Όταν κατασκευάσετε ένα κουμπί μπορείτε στη συνέχεια να κατασκευάσετε και το κουμπί αντίστροφης λειτουργίας του. Για να το κάνετε αυτό, πρέπει πρώτα να το επιλέξετε.

ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΗ/ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΟΥΜΠΙΟΥ Το κουμπί θα εμφανίζεται φωτισμένο

Όταν το κουμπί είναι φωτισμένο, επιλέξτε την εντολή: **Αριθμομηχανή /Ορισμός αντιστρόφου**

Εισαγάγετε τον αντίστροφο τύπο με τον ίδιο τρόπο που αναφέρθηκε παραπάνω.

Αν το κουμπί ήταν για την $y=2x$ τότε δώστε στην περιοχή 1 την παράσταση $7/2$ (αφού $y=2x$ τότε $x=y/2$), επιλέξτε το 7 και πατήστε το κουμπί με το ερωτηματικό, κατόπιν = και **OK**

Στο παράθυρο διαλόγου που θα εμφανιστεί θα έχετε τη δυνατότητα να δώσετε ένα νέο όνομα στο κουμπί. Το προκαθορισμένο όνομα που δίνεται σε ένα κουμπί αντιστροφής είναι το όνομα του αρχικού κουμπιού υψωμένο στη δύναμη -1. Το αντίστροφο κουμπί θα εμφανίζεται στην περιοχή των κουμπιών, όταν πατάτε το **INV**. Χρησιμοποιήστε το καινούριο κουμπί όπως θα χρησιμοποιούσατε οποιοδήποτε άλλο κουμπί αντιστροφής.

Παράδειγμα 3 το πρόβλημα της πίτσας

Το σκεπτικό

Ένα κατάστημα παρασκευάζει πίτσες σε διάφορα μεγέθη.

- Μια προσωπική πίτσα με διάμετρο 6 cm
- Μια μεσαία με διάμετρο 12 cm
- Μια μεγάλη με διάμετρο 18 cm
- Μια ομαδική με διάμετρο 24 cm
- Και μια γιγάντια με διάμετρο 30 cm



Η πιτσαρία έχει μια περίεργη πολιτική τιμών: Μπορεί κανείς να αγοράσει πληρώνοντας **21 λεπτά για κάθε cm που μετريέται στην περιφέρεια της πίτσας ή 5 λεπτά για κάθε τετραγωνικό cm πίτσας.**

Με άλλα λόγια μπορεί κάποιος να πληρώσει είτε με το μήκος της περιφέρειας είτε με το εμβαδόν της πίτσας.

Έστω ότι είστε ο καταναλωτής και προφανώς θέλετε το μεγαλύτερο κομμάτι με τα λιγότερα χρήματα, έτσι πρέπει να αποφασίσετε για τον καλύτερο τρόπο αγοράς. Θα χρησιμοποιήσουμε το **Function Probe** για να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

Εισάγουμε μεταβλητές και ονόματα

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας					
d	$r=d/2$	$c=2\pi r$	$a=\pi r^2$	$p=0.21c$	$m=0.05a$
διάμετρος	ακτίνα	μήκος	εμβαδό	τιμή με μήκος	τιμή με εμβαδό

για το π πατήστε **shift+p** (Αγγλικό πληκτρολόγιο)

Εισαγωγή δεδομένων είτε πληκτρολογώντας είτε με γέμισμα

Δίνουμε στο d τιμές 6,12,18,24,30 οπότε ενημερώνονται και οι άλλες στήλες

Κοιτώντας τον πίνακα, πιο μέγεθος πίτσας είναι πιο φτηνό αξιολογώντας με την μέθοδο τιμή ανά εμβαδόν; Ποιο μέγεθος της πίτσας είναι φτηνότερο με την μέθοδο της τιμής ανά μήκος περιφέρειας;

Χρήση του παραθύρου "Αριθμομηχανή"

Οι ιδιοκτήτες της πιτσαρίας τώρα λένε πως θα παρασκευάζουν κάθε μέγεθος πίτσας αν είχαν έναν εύκολο τρόπο να υπολογίζουν την τιμή του κάθε μεγέθους κάθε πίτσας.

Θα κάνουμε χρήση της Αριθμομηχανής.

Πληκτρολογούμε την πρώτη αξία

price1: $0.21 * 2 * 3.1415927 * 3 =$
 $0.21 * 2 * 3.1415927 * 3 =$

όπου 3 η ακτίνα

Για να αυτοματοποιήσουμε αυτή την διαδικασία, θα προσθέσουμε κουμπί με το οποίο θα υπολογίζουμε την αξία της πίτσας για κάθε ακτίνα. Επιλέξτε **Αριθμομηχανή/ Δημιουργία κουμπιού** και στην θέση του 3 βάζουμε το πατάμε OK και δίνουμε όνομα στο κουμπί πχ αξία1 ή price1

Κάνουμε το ίδιο και για την άλλη αξία κατασκευάζοντας άλλο κουμπί

price2: $0.05 * 3.1415927 * 3^2 =$
 $0.05 * 3.1415927 * 3^2 =$

όπου 3 η ακτίνα

Για να γράψουμε 3^2

πατάμε 3 το πλήκτρο x^a και μετά το 2 και =ή (Enter)

η πατάμε 2 , το πλήκτρο a^x και μετά το 3

δηλαδή η πρώτη πληκτρολόγηση αφορά το x

Υπάρχει μια πίτσα που κοστίζει το ίδιο και με τις δύο μεθόδους υπολογισμού;

Μπορούμε να αποφανθούμε από τον πίνακα η από την αριθμομηχανή ή από το γράφημα

Με την αριθμομηχανή είναι κουραστικό γιατί πληκτρολογούμε πολλές τιμές,

Βλάστος Αμίλιος Μαθηματικός

price1	price2
9.2	price2 = 13.29522
9.2	price1 12.13911
8.8	price2 12.16424
8.8	price1 11.61132
7.8	price2 9.556725
7.8	price1 10.29185

μπορούμε όμως να πάρουμε μια ένδειξη και να βλέπουμε τα αποτελέσματα στην περιοχή **3** για ακτίνα 7,8 έως 8,8 φαίνεται ότι η τιμή πρέπει να είναι ίδια.

Με τον πίνακα

ας πυκνώσουμε τις τιμές για διαμέτρους 12-18

Επιλέγουμε τα κελιά με τις τιμές 12 και 18 και εκτελούμε την εντολή

Πίνακας / ενδιάμεσο γέμισμα με βήμα 1

d	r=d/2	c=2πr	a=πr ²	p=0.21c	m=0.05a
διάμετρος	ακτίνα	μήκος	ευβαδό	τιμή με μήκος	τιμή με ευβαδό
6	3	18.85	28.27	3.96	1.41
12	6	37.7	113.1	7.92	5.65
13	6.5	40.84	132.73	8.58	6.64
14	7	43.98	153.94	9.24	7.7
15	7.5	47.12	176.71	9.9	8.84
16	8	50.27	201.06	10.56	10.05
17	8.5	53.41	226.98	11.22	11.35
18	9	56.55	254.47	11.88	12.72
24	12	75.4	452.39	15.83	22.62
30	15	94.25	706.86	19.79	35.34

Φαίνεται ότι για διαμέτρους 16-17 η τιμή θα είναι ίδια

Μπορούμε να

κάνουμε ενδιάμεσο

γέμισμα ανάμεσα

στα κελιά αυτά με

βήμα 0,1

16.4	8.2	51.52	211.24	10.82	10.56
16.5	8.25	51.84	213.82	10.89	10.69
16.6	8.3	52.15	216.42	10.95	10.82
16.7	8.35	52.46	219.04	11.02	10.95
16.8	8.4	52.78	221.67	11.08	11.08
16.9	8.45	53.09	224.32	11.15	11.22
17	8.5	53.41	226.98	11.22	11.35

Τελικά για ακτίνα 8,4 οι δύο αξίες είναι ίδιες και κάνουν 11.08 ευρώ.

Με το γράφημα

Για να εξετάσουμε το θέμα γραφικά, ας παραστήσουμε γραφικά με το Function Probe την σχέση ανάμεσα στην διάμετρο της πίτσας και στο κόστος με βάση την περιφέρεια.

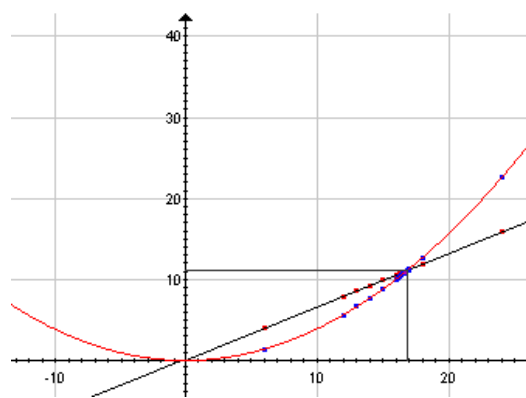
Μετακινούμε λοιπόν τα \square , \square ώστε να είναι πάνω από τα d και p αντίστοιχα. Και στέλνουμε τα ζεύγη στο παράθυρο γράφημα. Ρυθμίστε την κλίμακα.

(d,m) = (16.84,11.13)

Γραφική παράσταση εξίσωσης.

θα χρειαστεί μια γραμμή να περνά από όλα αυτά τα σημεία. Μπορούμε να το κάνουμε αυτό εισάγοντας την εξίσωση που συσχετίζει την αξία μιας πίτσας με την διάμετρό της.

Βλάστος Αμίλιος Μαθηματικός



Πληκτρολογούμε $p=.21\pi d$ ή και $y=0.21\pi x$

για το π πατάμε **shift+ p** (Αγγλικό πληκτρολόγιο)

Κάνουμε το ίδιο και για την $m=.05\pi(d^2)/4$

Προσπαθούμε να βρούμε που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις.
Χρησιμοποιούμε το 5^ο από τα εργαλεία του γραφήματος.

Παράδειγμα 4 ταυτότητες

Ο ορισμός της ταυτότητας : μια ισότητα που επαληθεύεται για κάθε τιμή των γραμμάτων της. Συνήθως δεν έχουμε τον χρόνο να δώσουμε πολλά παραδείγματα με τιμές στα γράμματα.

Θα μπορούσαμε στο FP και στο παράθυρο πίνακας να δώσουμε τα παρακάτω

α	β	$c=(\alpha+\beta)^2$	$d=\alpha^2+ 2*\alpha*\beta+ \beta^2$
-1	2		
1	4		
3	-12		
0	2		
κτλ.			

Επίσης μπορούμε να δώσουμε μια ακόμα στήλη $\kappa= \alpha^2+ \beta^2$ να συγκρίνουμε τα c, κ τα οποία θα είναι ίσα μόνο όταν $\alpha=0$ ή $\beta=0$.

Παράδειγμα 5 πρόοδοι

v	x	ω	y	$\Sigma \alpha$	$\Sigma=(2*3+(v-1)*\omega)*v/2$
Αρίθμηση					
1	3	4	3	3	3
2	7	4	7	10	10
3	11	4	11	21	21
4	15	4	15	36	36
5	19	4	19	55	55
6	23	4	23	78	78
7	27	4	27	105	105
8	31	4	31	136	136
9	35	4	35	171	171
10	39	4	39	210	210
11	43	4	43	253	253
12	47	4	47	300	300
13	51	4	51	351	351
14	55	4	55	406	406

Θα μπορούσαμε στο FP και στο παράθυρο πίνακας να δώσουμε τιμές χρησιμοποιώντας την μέθοδο του γεμίματος
 Δηλαδή να δώσουμε αρχική και τελική τιμή **και σαν διαφορά ω να χρησιμοποιήσουμε το συν ή το μείον**

Ή να δώσουμε αρχική – τελική τιμή και **σαν λόγο λ να χρησιμοποιήσουμε το επί ή το διά**

Έστω στην πρώτη στήλη στο πρώτο κελί δίνουμε **πίνακας/ γέμισμα** αρχική τιμή 3 , τελική 105 και βήμα σύν 4
 Κατόπιν κλικ στην στήλη αυτή ,στο πρώτο κελί και **πίνακας / στήλη αρίθμησης (υλοποιούμε έτσι την αρίθμηση των όρων.)** η αρίθμηση θα δημιουργηθεί στην αριστερή στήλη από αυτή που επιλέξαμε. Δίνουμε σαν μεταβλητή το γράμμα v

Τι χαρακτηριστικό έχουν αυτοί οι όροι;

Κατόπιν κλικ πάλι στην αρχική τιμή 3 και **πίνακας/διαφορά** (υλοποιούμαι- εμπεδώνουμε έτσι την σταθερή διαφορά των όρων .)

Σβήνουμε τον συμβολισμό $\Delta()$ και γράφουμε ω

Οι όροι αυτοί που έχουν σταθερή διαφορά ω λέγονται όροι αριθμητικής προόδου.

Στον παραδοσιακό πίνακα γράφουμε τις ισότητες

$$a_2 - a_1 = \omega = 4 \text{ οπότε } a_2 = a_1 + \omega$$

$$a_3 = a_2 + \omega = a_1 + \omega + \omega = a_1 + 2\omega$$

Τι χαρακτηριστικό έχουν αυτοί οι όροι;

Κάθε όρος της προόδου ισούται με τον προηγούμενό του σύν το ω αλλά επίσης φαίνεται να είναι : κάθε όρος a_n ισούται με τον πρώτο όρο σύν το γινόμενο του ω με $n-1$

Στην επόμενη στήλη δίνουμε $a = 3 + (n-1) * \omega$, οπότε επαληθεύουμε τις εικασίες μας.

Κατόπιν κλικ στην στήλη με τους όρους της προόδου και

Πίνακας/Συσώρευση

(υλοποιούμαι έτσι το άθροισμα των n πρώτων όρων της προόδου)

Στην επόμενη στήλη δίνουμε $\Sigma = (2 * 3 + (n-1) * \omega) * n / 2$, οπότε με τον τύπο αυτό επαληθεύουμε τα αποτελέσματα

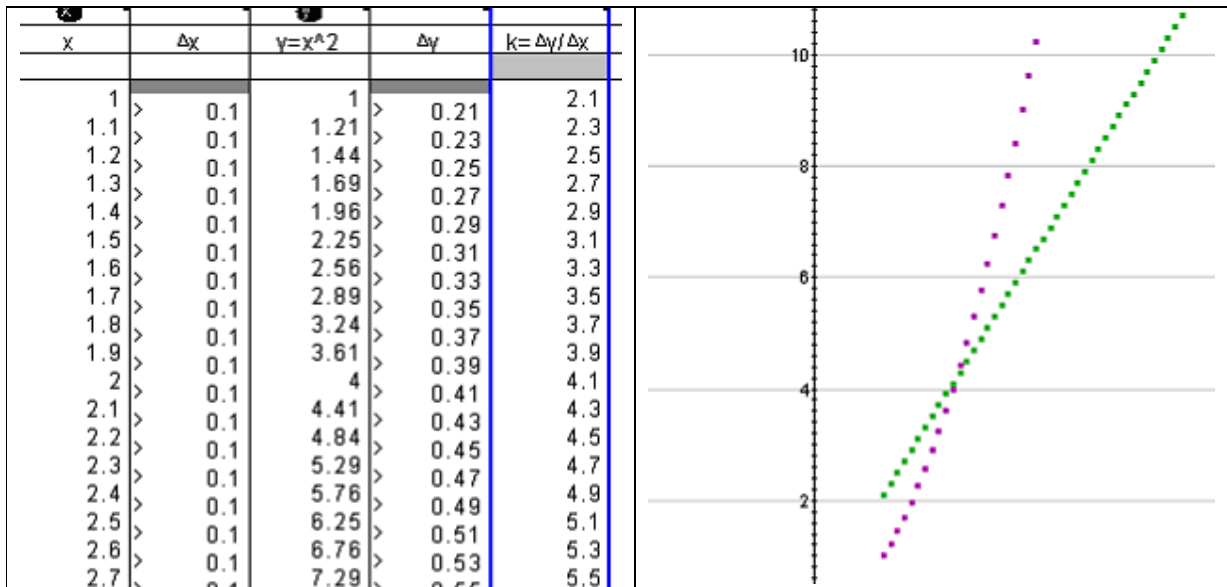
Μπορείτε να αφήσετε σαν πρώτο όρο το 3 και να κάνετε νέο γέμισμα με βήμα μείον 4

Βρείτε ξανά την διαφορά για να ενημερωθούν σωστά οι υπόλοιπες στήλες.

Όμοια μπορείτε να εργαστείτε για την γεωμετρική πρόοδο με τους τύπους

$$a_n = a_1 * \lambda^{n-1} \text{ και } \Sigma_n = a_1 * (\lambda^n - 1) / (\lambda - 1)$$

Παράδειγμα6 Παράγωγος αριθμός



- Γεμίζουμε την στήλη x από 1 έως 10 , επιλέγουμε το 1 και το 2, ενδιάμεσο γέμισμα με βήμα 0.1, το ίδιο για 2 και 3 κλπ.
- Κλίκ στη στήλη x , Παράθυρο/Διαφορά , βρίσκω Δx όμοια στη στήλη y για να βρούμε Δy
- Πληκτρολογούμε $k= \Delta y/ \Delta x$
- Από τον πίνακα στείλαμε στο γράφημα τα (x,y) που αντιστοιχούν στην συνάρτηση και τα (x,k) που αντιστοιχούν στην παράγωγο συνάρτηση. Φαίνεται ότι η συνάρτηση με τετμημένες x και τεταγμένες $\Delta y/\Delta x$ είναι **μια ευθεία., η $y=2x$**

Παράδειγμα7 Γράφημα



Για να εμφανίζεται η εργαλειοθήκη πρέπει το παράθυρο να μην είναι μεγιστοποιημένο

Μονοτονία

Με την εισαγωγή συνάρτησης (τρίτο εργαλείο) πληκτρολογούμε $y=x^2$ (ενώ είναι επιλεγμένη μπορούμε να αλλάξουμε χρώμα).

Επιλογή σημείων από τη γραφική παράσταση

Την επιλέγουμε με το πρώτο εργαλείο, **γράφημα/Δείγμα από καμπύλη/σύνολο σημείων**,

αρχικές τιμές του x έστω 0 τελικές 10, αριθμός τμημάτων 10

Ενώ είναι επιλεγμένα τα σημεία, **Αποστολή/σημεία σε πίνακα**

Βλέπουμε έτσι σε εφαρμογή τον ορισμό της γν. αύξουσας.

Όμοια αρχικές τιμές του x έστω -10 τελικές 0, αριθμός τμημάτων 10

Στα εμφανιζόμενα μηνύματα πατάμε OK

Βλέπουμε έτσι σε εφαρμογή τον ορισμό της γν. φθίνουσας.

Μετατοπίσεις

Οριζόντιες-κατακόρυφες

Μπορούμε να ζητήσουμε Αρχείο/νέος χώρος εργασίας

πληκτρολογούμε $y=x^2$

Παίρνουμε το εργαλείο των μετατοπίσεων (τρίτο εργαλείο από το τέλος),

επιλέγουμε την οριζόντια μετατόπιση κάνουμε κλικ στο OK και

μετατοπίζουμε την γραφ. παράσταση κατά 2 μονάδες δεξιά. (ένας

μετρητής το δείχνει). Εναλλακτικά αν δεν πάρουμε τη τιμή ακριβώς 2

μπορούμε μετά το Ok να πληκτρολογήσουμε 2 και μετά Enter

Για να φανεί ο τύπος της νέας συνάρτησης: **Γράφημα/Επιλογές**

γραφήματος/εμφάνιση μετασχηματισμών.

Η νέα συνάρτηση έχει τύπο $y=(x-2)^2$

Ας επιλέξουμε (προαιρετικά) και στις δύο το ίδιο σύνολο σημείων (π.χ. 0, 10 ,10)

Από τα γραφήματα φαίνεται ότι η μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 2 αφήνει τις γραφικές παραστάσεις με τα ίδια ψ . Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η νέα συνάρτηση που έχει x αυξημένο ήδη κατά 2 να έχει τύπο μειωμένο κατά 2 δηλαδή να γίνει $x-2$

Όμοια κάνουμε κατακόρυφη μετατόπιση στην $y=x^2$ κατά 2

οπότε η νέα συνάρτηση έχει τύπο $y=x^2 +2$

Ας επιλέξουμε (προαιρετικά) και στις δύο το ίδιο σύνολο σημείων (π.χ. 0, 10 ,10)

Από τα γραφήματα φαίνεται ότι η μετατόπιση προς τα πάνω κατά 2 αφήνει τις γραφικές παραστάσεις με τα ίδια x . Για να συμβαίνει αυτό

πρέπει η νέα συνάρτηση να έχει ψ αυξημένο κατά 2, δηλαδή να έχει τύπο $\psi+2$, έτσι προκύπτει η $y=\chi^2+2$

Μπορούμε αν θέλουμε να στείλουμε τα σημεία στον πίνακα τιμών και να κάνουμε και εκεί τις παραπάνω διαπιστώσεις.

Άξονες συμμετρίας

Μπορούμε να ζητήσουμε Αρχείο/νέος χώρος εργασίας πληκτρολογούμε $y=\chi^2$

Παίρνουμε το εργαλείο των συμμετριών (δεύτερο εργαλείο από το τέλος), επιλέγουμε τον $\chi\chi'$ και κάνουμε κλικ. Ας μη εμφανίσουμε τον τύπο.

Ας επιλέξουμε (προαιρετικά) και στις δύο το ίδιο σύνολο σημείων (π.χ. 0, 10, 10) και ας τα αποστείλουμε στον πίνακα τιμών όπου είναι φανερό ότι για τα ίδια χ αντιστοιχούν αντίθετα ψ , οπότε εικάζουμε για τον τύπο.

Κάνουμε την ίδια εργασία για τον $\psi\psi'$ οπότε παίρνουμε τον εαυτό της Κάνουμε την ίδια εργασία για τον $\psi\psi'$, αλλά πριν το κλικ μετατοπίζουμε την άγκυρα ώστε ο άξονας συμμετρίας να γίνει π.χ. η $\chi=-2$, οπότε

βλέπουμε ότι είναι οριζόντια μετατόπιση κατά -2 άρα είναι η $\psi=(\chi+2)^2$

Κάνουμε την ίδια εργασία για την διχοτόμο $\psi=\chi$, επιλέγουμε και στέλνουμε σημεία στον πίνακα τιμών από την $y=\chi^2$

Δημιουργούμε τη στήλη $k=y$, $l=x$ και στέλνουμε τα σημεία αυτά στο γράφημα, όπου θα απεικονιστούν στην συμμετρική της $y=\chi^2$ ως προς την $y=x$ (συμπεραίνουμε ότι είναι η $\psi^2=\chi$, φανερό ότι η συμμετρική δεν είναι συνάρτηση

x	y	k=y	l=x
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	4	2
3	9	9	3
4	16	16	4
5	25	25	5
6	36	36	6
7	49	49	7
8	64	64	8
9	81	81	9
10	100	100	10

Ας κάνουμε την ίδια εργασία για την $\psi=2^{\chi}$ για να πάρουμε την συμμετρική της (αντίστροφη)

Γράφουμε $k=y$ (το y έχει το ρόλο τη τετμημένης, ας το μετονομάσουμε k , η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $m=f(k)$, ας μη την ονομάσουμε λογάριθμο)

1. Στέλνουμε τα ζεύγη (x,y) και (k,m) στο γράφημα.

2. Παρατηρώντας τον πίνακα (2 τελευταίες στήλες) φαίνεται επίσης να έχει την ιδιότητα.

$$5=f(32)=f(4 \cdot 8)=f(4)+f(8)=2+3=5$$

$$\text{όπως και } 2=f(4)=f(8/2)=f(8)-f(2)=3-1=2$$

$$\text{όπως και } 5=f(64)=f(2^6)=6f(2)=5 \cdot 1=5$$

x	y	k=y	m=x
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3
4	16	16	4
5	32	32	5
6	64	64	6
7	128	128	7
8	256	256	8
9	512	512	9
10	1024	1024	10

Επίσης από τις δύο πρώτες στήλες μπορούμε να δούμε ιδιότητες δυνάμεων

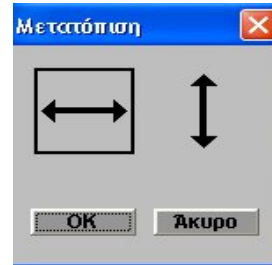
$$2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32, 2^5 = 32 \text{ κλπ.}$$

Εργαλείο μετατόπισης

κλικ στη γραφική παράσταση
και στο διπλανό
εικονίδιο



Με την μετατόπιση η
γραφική παράσταση δεν
«χαλάει» (διατηρεί την κλίση
της)

**Εργαλείο αυξομείωσης**

κλικ στη γραφική παράσταση
και στο διπλανό εικονίδιο



Με την Αυξομείωση η
γραφική παράσταση «χαλάει»
(δεν διατηρεί την κλίση της)

