Τετραγωνισμοί πολυγώνων, Προσέγγιση τετραγωνισμού κύκλου, Μία πρόταση διδασκαλίας.

Αιμίλιος Βλάστος-Μαρία Καλογήρου, μαθηματικοί στο Μουσικό Σχολείο Καρδίτσας.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στο να αναδειχθεί ο ρόλος του μαθηματικού λογισμικού στην διδασκαλία της γεωμετρίας. Ο τετραγωνισμός ενός κυρτού πολυγώνου απαιτεί χρόνο και αρκετή προσπάθεια από τους μαθητές γιατί ούτε είναι εξοικειωμένοι ούτε χρησιμοποιούν εύκολα, ακόμα και στο σχολείο, τον κανόνα και τον διαβήτη. Το λογισμικό έρχεται να προσομοιώσει τον κανόνα και τον διαβήτη και να κάνει ακριβείς και ταχύτατες κατασκευές: του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του τριγώνου, του κυρτού πολυγώνου. Τελικά όταν χρησιμοποιηθούν όλα τα μέσα του λογισμικού, φτάνουμε και στον τετραγωνισμό του κύκλου. Έτσι το λογισμικό σαν μέσο διαμεσολάβησης δημιουργεί το κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον και την αφόρμιση στο να δεχθούν οι μαθητές πληροφορίες που αφορούν την ιστορία των μαθηματικών και κυρίως τις προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου από τους αρχαίους Έλληνες.

Εισαγωγή-Θεωρητικό πλαίσιο

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας και ιδιαίτερα των μαθηματικών λογισμικών στην εκπαιδευτική διαδικασία, αφού έχει μελετηθεί και ερευνηθεί, έχει περάσει πλέον στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Κοινή είναι η πεποίθηση ότι η τεχνολογία ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση της γεωμετρίας από τους μαθητές. Επίσης ενθαρρύνει τους καθηγητές να εμπλέξουν τους μαθητές (και ειδικά αυτούς που έχουν ανάγκη πρόσθετης βοήθειας) σε διάφορες εκπαιδευτικές δραστηριότητες που διευκολύνουν τη διαδικασία εκμάθησης.

Ο Dixon (1997) επισημαίνει πόσο γρήγορα και εύκολα οι μαθητές μπορούν να χειριστούν σχήματα χρησιμοποιώντας το Geometer Sketchpad και πόσο αργά και επίπονα και ίσως και ανέφικτα αυτοί οι ίδιοι στόχοι να επιτυγχάνονται όταν γίνονται με το μολύβι και το χαρτί (1997). Αυτό ελευθερώνει τους μαθητές από πρακτικές των στερεότυπων υπολογισμών και τους επιτρέπει να εστιάζουν στις έννοιες και τα προβλήματα που τους ενδιαφέρουν περισσότερο. Κατά συνέπεια, η τεχνολογία μπορεί να προωθήσει μια υψηλότερου επιπέδου σκέψη επειδή οι μαθητές ξοδεύουν περισσότερο χρόνο για απεικόνιση και ανάλυση (Nicaise & Barnes, 1996).

Είναι γεγονός ότι τα εργαλεία, οι τεχνικές διερεύνησης και οι οπτικές αναπαραστάσεις που συνδέονται με τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, συνεισφέρουν στην οικοδόμηση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που διαφοροποιείται πλήρως από την παραδοσιακή διδασκαλία της γεωμετρίας με το χάρακα και το διαβήτη. Τα είδη των μέσων διαμεσολάβησης είναι στενά συνυφασμένα με τη γνώση που οικοδομούν οι μαθητές και συντελούν στην ενίσχυση κατάκτησης του γ΄ επίπεδου Van Hiele.

Η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να δίνει στους σπουδαστές την «καθοδηγούμενη» ευκαιρία να «επανεφεύρουν» τα μαθηματικά. Ο Freudenthal (1973) ονόμασε αυτή την διαδικασία «αρχή της επανεφεύρεσης» (reinvention principle) και αργότερα (1991) την αποκάλεσε «καθοδηγούμενη επανεφεύρεση» (guided re-invention). Ο Freudenthal το 1973 αναρωτιέται: Πώς να παρουσιάσουμε στους μαθητές μια δραστηριότητα, ώστε να έχει νόημα γι' αυτούς, δηλαδή να έχει την αίσθηση της πραγματικότητας;

Η μαθηματική δραστηριότητα αφορά την οργάνωση των δραστηριοτήτων των μαθητών κατά την επίλυση του προβλήματος, όπως η εύρεση ομοιοτήτων - διαφορών, η εύρεση μέσω επαγωγικού συλλογισμού κρυφών δομών, ο συμβολισμός, η απόδειξη, η γενίκευση λύσεων, οι διαφορετικές λύσεις, οι ορισμοί των εννοιών, η χρήση μοντέλων, η αιτιολόγηση, η δημιουργία αλγόριθμου κ.λπ. Η διδακτική δραστηριότητα αφορά τη διαδικασία που ακολουθείται, όπως ατομική ή ομαδική εργασία, αλληλοβοήθεια, διατύπωση και συζήτηση των προσεγγίσεων, της καλύτερης ,συντομότερης βέλτιστης λύσης κ.λπ. Ο ρόλος του δασκάλου είναι να ζητά αιτιολόγηση, να συζητά προσεγγίσεις και στρατηγικές, να παρακινεί και, τέλος να καθορίζει κριτήρια αξιολόγησης.

Ο Freudenthal το 1983 ισχυρίζεται ότι η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση δε χρησιμοποιεί την πραγματικότητα μόνο για εφαρμογές, αλλά η πραγματικότητα αποτελεί πηγή σχηματισμού εννοιών. Η μαθηματική δομή αντλείται από τα πραγματικά φαινόμενα, δηλαδή η πραγματικότητα είναι στέρεα βάση για τη διαδικασία της μάθησης και όχι μεταγενέστερο πεδίο εφαρμογής της γνώσης

Το σκεπτικό της δραστηριότητας

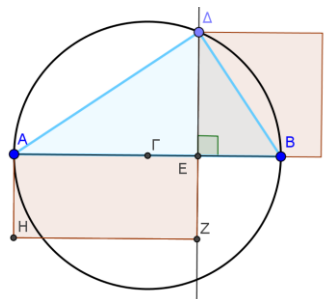
Δίνουμε στους μαθητές τη δυνατότητα να θεωρήσουν ότι είναι τμήμα ενός εργαστηρίου το οποίο δέχεται κοσμήματα οποιουδήποτε επίπεδου συνηθισμένου σχήματος και σκοπός είναι ο τετραγωνισμός τους. Δηλαδή να σχηματίσουν τέτοια τετράγωνα καλούπια ώστε το εμβαδό του «τετράγωνου» κοσμήματος να ισούται με το αρχικό. Βασικός περιορισμός είναι η εργασία μας να ακολουθεί τη μέθοδο με την οποία οι Αρχαίοι Έλληνες έκαναν τις κατασκευές τους, δηλαδή με κανόνα και διαβήτη.

Στο λογισμικό Geogebra υπάρχει η δυνατότητα να προσαρμοσθεί η εργαλειοθήκη ώστε να προσομοιωθεί η δυνατότητα κατασκευής με κανόνα και διαβήτη, μέθοδο που ακολούθησαν επί αιώνες οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες. Έτσι με διαθέσιμα τα εργαλεία: Ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, σημείο, τομή δύο γραμμών, κύκλος με κέντρο και ακτίνα και πολύγωνο κάνουμε βασικές κατασκευές, όπως το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος, το τετράγωνο και η κατασκευή ενός ορθογωνίου που οι διαστάσεις του είναι διαδοχικά συνευθειακά ευθύγραμμα τμήματα. Οι κατασκευές αυτές αποθηκεύονται στο λογισμικό ως νέα εργαλεία και χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες του μαθήματος. Οι δραστηριότητες αυτές αποσκοπούν στο να κινητοποιήσουν τους μαθητές να ανακαλύψουν τον τρόπο εκείνο που θα τους οδηγήσει στον τετραγωνισμό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ενός τριγώνου και γενικότερα ενός κυρτού πολυγώνου.

Στην τελευταία δραστηριότητα άρουμε τον περιορισμό της «συμμόρφωσης» του λογισμικού ώστε να κάνει κατασκευές μόνο με κανόνα και διαβήτη και το εφοδιάζουμε με όλα του τα εργαλεία. Το αποτέλεσμα είναι βασιζόμενοι στις προηγούμενες δραστηριότητες να φτάσουμε στον τετραγωνισμό του κύκλου. Αυτό βέβαια δίνει και το έναυσμα για συζήτηση και παροχή πληροφοριών για τις προσπάθειες των Αρχαίων Ελλήνων για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

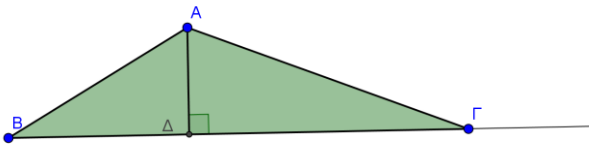
Α΄ μέρος-Ανάλυση των δραστηριοτήτων

Το σκεπτικό της διδακτικής πρότασης ξεκινά με την πρώτη δραστηριότητα. Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ και το ύψος του ΔΕ προς την υποτείνουσα ΑΒ. Η σχέση $ΔΕ^2$=ΒΕ.ΕΑ ζητείται να ερμηνευτεί ως ισότητα εμβαδού τετραγώνου πλευράς ΕΔ και εμβαδού ορθογωνίου με διαστάσεις ΕΑ, ΒΕ. Στο λογισμικό (με τα εργαλεία: **«τετράγωνο», «ορθογώνιο3»**) αλλά και στο χαρτί οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν τα δύο εμβαδά.

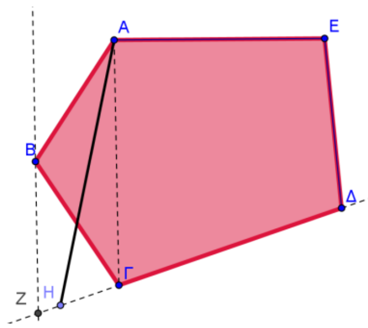


Το εργαλείο «ορθογώνιο3» εφαρμόζεται στα σημεία Α,Ε,Β της υποτείνουσας ΑΒ, ενώ το τετράγωνο στα άκρα του ΔΕ. Αυτό δίνει και την ιδέα ότι για να τετραγωνιστεί ένα ορθογώνιο ΑΕΖΗ αρκεί η πλευρά ΕΖ να πάρει τη θέση της ΕΒ, οπότε θα αρκούσε η ακόλουθη σειρά ενεργειών: η κατασκευή του μέσου Γ της ΑΒ, κύκλου (Γ,ΑΒ/2), οπότε το Δ θα είναι το σημείο τομής του κύκλου, της καθέτου από το Ε προς την ΑΒ και τελικά η πλευρά που «τετραγωνίζει» το ορθογώνιο θα είναι η ΔΕ. Στην επόμενη δραστηριότητα ζητείται από τους μαθητές να τετραγωνίσουν ένα ορθογώνιο καθοδηγούμενοι σύμφωνα με την προηγούμενη σειρά ενεργειών.

Κατόπιν ζητείται να τετραγωνιστεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ. Με κατάλληλες ερωτήσεις αλλά και τη βοήθεια του διπλανού σχήματος οδηγούμε τους μαθητές στην κατασκευή τμήματος ΓΕ=ΑΔ/2 πάνω στην ημιευθεία ΒΓ, οπότε απομένει η σειρά ενεργειών: μέσο του ΒΕ, κύκλος με διάμετρο την ΒΕ , κάθετη από το Γ στην ΒΓ και εύρεση της πλευράς του ζητούμενου τετραγώνου. Από τους μαθητές μπορεί να ζητηθεί μόνο η περιγραφή των παραπάνω ενεργειών, αφού η κατασκευή τους έχει ενσωματωθεί στο εργαλείο: **«κύκλος-ύψος-προβολή»** που έχει κατασκευαστεί στην προηγούμενη δραστηριότητα. Τη σειρά αυτών των βημάτων κατασκευής την αποθηκεύουμε δημιουργώντας το εργαλείο «**τετραγωνισμός τριγώνου**».



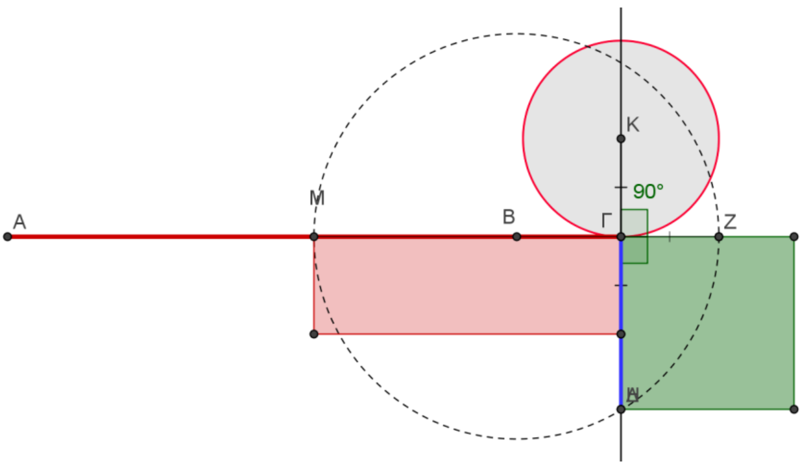
Η επόμενη δραστηριότητα αφορά το μετασχηματισμό ενός πενταγώνου σε ισοδύναμο (ισεμβαδικό) με μια πλευρά λιγότερη. Δίνεται η δυνατότητα με δυναμικό χειρισμό της πλευράς ΑΗ να διερευνηθεί διαισθητικά η τελική της θέση, ώστε το ΑΒΓΔΕ να είναι ισεμβαδικό με το τετράπλευρο ΑΕΔΗ όπου βέβαια μετά τις απαραίτητες εικασίες το Η πρέπει να καταλήξει στο Ζ. Μετά την εξερεύνηση που προσφέρει το λογισμικό κινητοποιούμε τους μαθητές να περάσουν στην αποδεικτική διαδικασία. Αυτό απαιτεί να φέρουμε ΒΖ//ΑΓ και την αυστηρή γεωμετρική απόδειξη ότι το πεντάγωνο και το τετράπλευρο έχουν κοινό το εμβαδό του ΑΕΔΓ και ότι (ΑΒΓ)=(ΑΖΓ), αφού έχουν κοινή βάση ΑΓ και ίσα ύψη..



Η κατασκευή αυτή οδηγεί στην δημιουργία ενός νέου εργαλείου: **«πολύγωνο-τρίγωνο»** το οποίο μετασχηματίζει ένα πολύγωνο σε ισεμβαδικό με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη. Έτσι η επόμενη δραστηριότητα γίνεται αποκλειστικά στο περιβάλλον του λογισμικού όπου ένα δοσμένο εξάγωνο μετασχηματίζεται με το παραπάνω εργαλείο σε πεντάγωνο, τετράπλευρο και τελικά τρίγωνο όλα ισεμβαδικά μεταξύ τους, κάτι που το επαληθεύουμε και με το λογισμικό αφού μπορεί και «μετρά» εμβαδά. Αυτό το διαπιστώνουμε στο παράθυρο της άλγεβρας. Το τελικό μετασχηματισθέν πολύγωνο (τρίγωνο) τελικά τετραγωνίζεται χρησιμοποιώντας το εργαλείο: «**τετραγωνισμός τριγώνου**».

Επεκτείνοντας τις δραστηριότητες αυτές μπορούμε με το λογισμικό να τετραγωνίσουμε ένα μη κυρτό πολύγωνο, αρκεί να το χωρίσουμε σε τρίγωνα τα οποία θα τετραγωνίσουμε. Κατόπιν παίρνοντας ένα ζεύγος τετραγώνων επίσης το τετραγωνίζουμε.

Τελευταία δραστηριότητα είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου με το λογισμικό χρησιμοποιώντας όλα τα εργαλεία του, χωρίς δηλαδή τον περιορισμό των κατασκευών με κανόνα και διαβήτη. Όπως βλέπουμε και στο παρακάτω σχήμα «ευθειοποιήσαμε» την περιφέρεια του κύκλου, δηλαδή ΑΒ =2πρ, στη συνέχεια τον «ορθογωνιοποιήσαμε» και τελικά πετύχαμε τον «τετραγωνισμό» του. Η υλοποίηση αυτής της κατασκευής μπορεί εύκολα να προκαλέσει θαυμασμό ή προβληματισμό και απορίες αφού κοινή είναι η πεποίθηση ότι ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται, ή όπως λανθασμένα λέγεται είναι ένα άλυτο θέμα.



Η τεχνολογία είναι αφόρμιση στο να δεχθούν οι μαθητές πληροφορίες που αφορούν την ιστορία των μαθηματικών. Έτσι μετά από τις παραπάνω δραστηριότητες παραθέτουμε τις προσπάθειες των Αρχαίων Ελλήνων για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

Β΄ μέρος-Προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου από τους αρχαίους Έλληνες

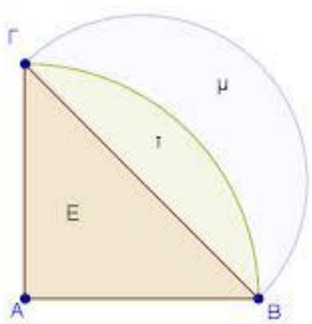
Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα τρία περίφημα ‘άλυτα’ προβλήματα της αρχαιότητας. Το να τετραγωνιστεί ο κύκλος ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης ενός τετραγώνου με εμβαδό ίσο με αυτό που περικλείεται από τον κύκλο. Η κατασκευή έπρεπε να γίνει με χρήση μόνο του κανόνα και του διαβήτη, μιας και οι Έλληνες φιλόσοφοι θεωρούσαν ότι η ευθεία και ο κύκλος ήταν οι βασικές και τέλειες γραμμές, μέσω πεπερασμένου αριθμού βημάτων.

Όλη η πορεία της ελληνικής γεωμετρίας επηρεάστηκε έντονα από τις συνεχείς έρευνες, οι οποίες είχαν την απαρχή τους στις προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος αυτού.

Οι Έλληνες γεωμέτρες κατέληξαν πολύ γρήγορα στο συμπέρασμα πως το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου δεν ήταν *επίπεδο* (να μπορεί να επιλυθεί μόνο με χρήση της ευθείας και του κύκλου), αλλά *γραμμικό*, δηλαδή η επίλυσή του απαιτούσε είτε καμπύλες ανώτερες από κύκλους, είτε άλλα μηχανικά μέσα.

Α. Με «επίπεδες» μεθόδους

Οι πρώτες προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με χρήση κανόνα και διαβήτη, όπως ορίζεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ανήκουν στο δεύτερο μισό του $5^{ου}$ αιώνα π.Χ.. Ο περίφημος φιλόσοφος *Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος* (500-428 π.Χ.), δάσκαλος και φίλος του Περικλή, αναφέρεται ως ο πρώτος που ασχολήθηκε με το πρόβλημα, όταν μάλιστα ήταν στη φυλακή.



Πολύ σημαντική είναι η συμβολή του *Ιπποκράτη του Χίου* (400-470 π.Χ.) ο οποίος προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα με τον τετραγωνισμό των μηνίσκων. Ο Ιπποκράτης παρατήρησε και απέδειξε ότι το σχήμα μ που περικλείεται μεταξύ των τόξων δύο κύκλων (μηνίσκος) είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

Ο Ιπποκράτης τετραγώνισε και άλλους μηνίσκους και μάλιστα πέτυχε να τετραγωνίσει το άθροισμα ενός μηνίσκου και ενός κύκλου, αλλά όχι τον ίδιο τον κύκλο. Γρήγορα κατάλαβε ότι οι «επίπεδες» μέθοδοι δε θα μπορούσαν να λύσουν το πρόβλημα, όμως συνέχισε την έρευνά του, θέλοντας να δείξει ότι, αν οι κύκλοι δε μπορούν να τετραγωνιστούν με αυτές τις μεθόδους, οι τελευταίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας ορισμένων σχημάτων που περικλείονται από τόξα κύκλων.

Ο σοφιστής *Αντιφών ο Αθηναίος* (περί το 430 π.Χ.), σύγχρονος του Σωκράτη, χρησιμοποιεί κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο, διπλασιάζοντας κάθε φορά τον αριθμό των πλευρών τους. Πίστευε ότι με τον τρόπο αυτό η επιφάνεια του κύκλου θα καλυπτόταν και κάποτε θα προέκυπτε ένα πολύγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο με πλευρές οι οποίες, λόγω του μικρού τους μήκους, θα συνέπιπταν με τον κύκλο. Και καθώς μπορούσε να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο ίσο σε εμβαδόν με οποιοδήποτε πολύγωνο, θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο ίσο σε εμβαδόν με ένα κύκλο.

Ο σοφιστής *Βρύσων ο Ηρακλειώτης,* μια γενιά μετά από τον Αντιφώντα, μαθητής του Σωκράτη ή του Ευκλείδη του Μεγαρείτη, υπήρξε επίσης ο συγγραφέας μιας άλλης απόπειρας τετραγωνισμού, η οποία επικρίθηκε από τον Αριστοτέλη ως «σοφιστική» και «εριστική». Πιθανόν όμως να προχώρησε κατά ένα βήμα περισσότερο από τον Αντιφώντα καθώς η μέθοδός του λάμβανε υπόψη τα περιγεγραμμένα, καθώς και τα εγγεγραμμένα πολύγωνα τον κύκλο, μέθοδο την οποία εξέλιξε με τη μέθοδο της εξάντλησης ο Αρχιμήδης.

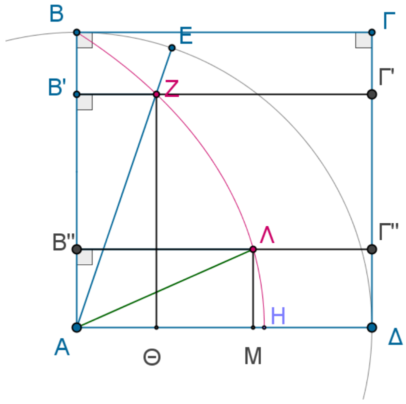
Β. Με χρήση ανώτερων καμπυλών

Ο Ιάμβλιχος, σχετικά με τον τετραγωνισμό του κύκλου, αναφέρει:
«Ο Αρχιμήδης τον πέτυχε με χρήση της καμπύλης, γνωστής με το ειδικό όνομα ‘τετραγωνίζουσα’, ο Απολλώνιος με χρήση κάποιας καμπύλης την οποία ο ίδιος ονομάζει ‘αδελφή της κοχλιοειδούς’ η οποία, όμως, είναι ίδια με την καμπύλη του Νικομήδη, και τέλος ο Κάρπος με χρήση κάποιας καμπύλης, για την οποία λέει ότι αυτή δημιουργείται ‘από μια διπλή κίνηση’.»

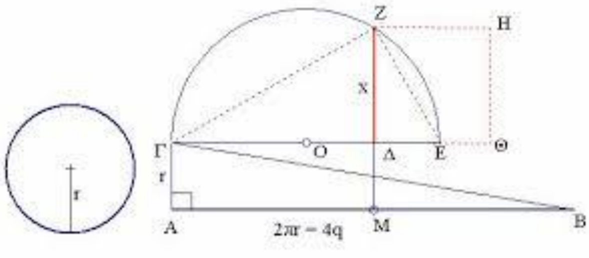
(α) Η τετραγωνίζουσα του Ιππία

Ο σοφιστής Ιππίας ο Ήλειος (420 π.Χ. περίπου) εμπνεύστηκε την καμπύλη, η οποία ονομάστηκε *τετραγωνίζουσα.* Στη μεγάλη επιτομή του Πάππου αναφέρεται ότι η καμπύλη αυτή δεν χρησιμοποιήθηκε από τον ίδιο τον Ιππία για τον τετραγωνισμό του κύκλου, αλλά ότι ο Δεινόστρατος (ένας από τους αδελφούς του Μέναιχμου) καθώς και άλλοι μεταγενέστεροι γεωμέτρες εφάρμοσαν πρώτοι την τετραγωνίζουσα γι' αυτό το σκοπό.

«Η μέθοδος κατασκευής της περιγράφεται από τον Πάππο: *Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και ΒΕΔ ένα τεταρτημόριο κύκλου με κέντρο Α. Έστω: (1) ότι μια ακτίνα του κύκλου στρέφεται ομαλά γύρω από το Α από τη θέση ΑΒ στη θέση ΑΔ, και (2) ότι ταυτόχρονα η ημιευθεία ΒΓ κινείται ομαλά, πάντα παράλληλα προς τον εαυτό της και με την αρχή της Β να κινείται κατά μήκος της ΒΑ, από τη θέση Β στη θέση Α. Στις τελικές τους θέσεις, η κινούμενη ευθεία και η κινούμενη ακτίνα συμπίπτουν και οι δύο με την ΑΔ, και σε κάθε προηγούμενη χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της κίνησης, η κινούμενη γραμμή και η κινούμενη ακτίνα ορίζουν με την τομή τους ένα σημείο, όπως το Ζ ή το Λ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων αυτών είναι η τετραγωνίζουσα. Η ιδιότητα της καμπύλης αυτής είναι ότι:* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma : \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Delta : \mathrm{E}\widehat{\Delta} = \mathrm{AB} : \mathrm{Z}\Theta$ » (Sir Thomas Health, 1921).



Με τη βοήθεια της τετραγωνίζουσας (διπλανό σχήμα) ο Ιππίας, απέδειξε ότι $\frac{q}{AB} = \frac{AB}{AH}$ ή $\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{q}$, όπου q το τόξο του τεταρτοκυκλίου $BE\Delta$, το οποίο κατασκευάζεται ως η τέταρτη ανάλογος των ΑΒ, ΑΒ και ΑΗ. Μπόρεσε έτσι να κατασκευάσει ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με $4q$, δηλαδή ίσο με το μήκος του κύκλου. Για τον τετραγωνισμό του, πιθανόν χρησιμοποίησε την πρόταση (1) από το έργο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρηση», σύμφωνα με την οποία το εμβαδόν ενός κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο η κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα, και η βάση ίση με την περιφέρεια του κύκλου, πρόταση που αποδεικνύεται με τη μέθοδο της εξάντλησης.

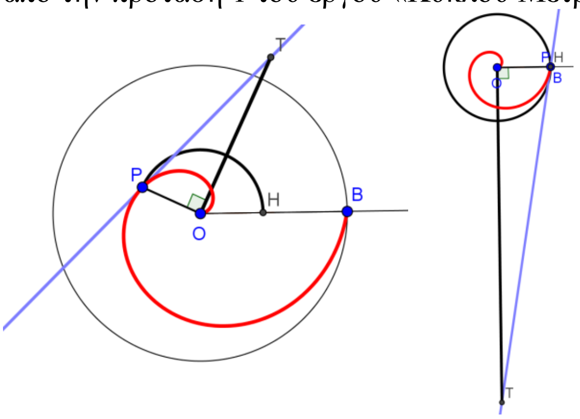


Εμβαδόν κύκλου = Εμβαδον ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ

(β) Η έλικα (σπείρα) του Αρχιμήδη

Είναι βέβαιο ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε την ομώνυμη έλικά του *«για την ευθειοποίηση όχι μόνο ολόκληρης της περιφέρειας, αλλά και ενός τυχαίου τόξου της, υπέδειξε τη χάραξη της εφαπτομένης χρησιμοποιώντας, όπως λέμε σήμερα, την πολική υφαπτομένη και έδωσε πλήθος θεωρημάτων τετραγωνισμού, χαρακτηριζόμενων από άφθαστης κομψότητας.»* (G.Loria,1971)

Έστω ότι μια ημιευθεία με σταθερή την αρχή της, έστω Ο ξεκινά να περιστρέφεται ομαλά περί το Ο, ενώ ένα σημείο της κινείται επίσης ομαλά, κατά μήκος της, ξεκινώντας από το Ο κατά την έναρξη της κίνησης της ημιευθείας. Έτσι το κινούμενο σημείο θα γράψει μια καμπύλη με ένα άκρο της το Ο. Αν Τ η τομή της εφαπτομένης σε κάθε σημείο Ρ με την κάθετη από το Ο στην επιβατική ακτίνα ΟΡ, τότε ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι ΟΤ=(μήκος τόξου ΡΗ). Έτσι η έλικα χρησιμοποιήθηκε για την ευθειοποίηση οποιουδήποτε κύκλου και ο τετραγωνισμός προκύπτει άμεσα από την πρόταση 1 του έργου «Κύκλου Μέτρηση».



Η έλικα του Αρχιμήδη

(γ) Λύσεις του Απολλώνιου και του Κάρπου

Στον Απολλώνιο τον Περγαίο, προγενέστερο του Αρχιμήδη αποδίδεται μια γραφική μέθοδος ευθειοποίησης της περιφέρειας, στηριζόμενη στη χρήση μιας ειδικής καμπύλης, που έως σήμερα δεν έχει εξακριβωθεί. Σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο, ο ίδιος ο Απολλώνιος αποκαλούσε την καμπύλη που χρησιμοποίησε για τον τετραγωνισμό του κύκλου «αδελφή της κοχλοειδούς». Σύμφωνα με κάποιους ιστορικούς, η εν λόγω καμπύλη, πρέπει να ήταν η κυλινδρική σπείρα, αφού ο Απολλώνιος είχε αφιερώσει στην καμπύλη αυτή ειδική πραγματεία «Περί Κοχλίου».

Ωστόσο τίποτα δεν είναι γνωστό για την καμπύλη του Κάρπου «της διπλής κίνησης»

(δ) Προσεγγίσεις της τιμής του π

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι συνυφασμένος με την αριθμητική φύση του αριθμού π. Ο Αρχιμήδης, σε αντίθεση με τους προγενέστερούς του γεωμέτρες, δεν επέμεινε στην προσπάθεια να λύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με τη χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη. Αντικαθιστώντας την απαίτηση της κατασκευής με την απαίτηση της μέτρησης, καταπιάστηκε να προσδιορίσει με ικανοποιητική προσέγγιση τον λόγο π της περιφέρειας προς τη διάμετρο. Εγγράφοντας και περιγράφοντας κανονικά πολύγωνα 96 πλευρών (όπως είχαν κάνει με ανάλογες προθέσεις οι Αντιφώντας και Βρύσωνας) και υπολογίζοντας τις αντίστοιχες περιμέτρους τους πέτυχε την προσέγγιση $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ (Κύκλου Μέτρησις, πρόταση 3). Στο έργο *Πλινθίδες και Κύλινδροι* έδωσε μια ακόμη καλύτερη προσέγγιση 3,141596.

Ο Πτολεμαίος, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα Χορδών του, δίνει μια προσέγγιση του π ίση με $3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60}$ ή 3,1416, ανεξάρτητα από τον Αρχιμήδη.

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος έλυσε το ίδιο πρόβλημα στο έργο του *Ωκυτόκιον* («μέσω γρήγορου τοκετού») χρησιμοποιώντας άλλους αριθμούς και καθιστώντας την προσέγγιση καλύτερη από τον Αρχιμήδη, ωστόσο η προσέγγισή του δεν πέτυχε να υπηρετήσει το σκοπό που είχε υπόψη του ο Αρχιμήδης, δηλαδή να βρει ένα προσεγγιστικό αριθμό κατάλληλο για χρήση στην καθημερινή ζωή.

Λύση του προβλήματος

Η «λύση» του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου δόθηκε τον 19$^{\text{ο}}$ αιώνα. Η «λύση» ήταν η απόδειξη ότι η ζητούμενη κατασκευή δεν είναι δυνατή. Μόλις το 1882 ο Γερμανός μαθηματικός Λίντεμαν (K.L.F. von Lindemann) απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι *υπερβατικός*, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Συνεπώς το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου δεν μπορεί να αναχθεί σε αλγεβρική εξίσωση και άρα δε μπορεί να επιτευχθεί η κατασκευή με τις απαιτήσεις των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Συμπεράσματα

Η παραπάνω εργασία αφορά ένα μάθημα που διδάσκεται στη Γεωμετρία Β λυκείου (αλλά μπορεί να διδαχθεί και στην Α λυκείου, καθώς δεν έχει άγνωστες έννοιες και θεωρία εκτός από το ότι, το τετράγωνο του ύψους σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισούται με το γινόμενο των δύο προβολών του πάνω στην υποτείνουσα). Ξεκίνησε να διδάσκεται από το 2014 και οριστικοποιήθηκε τη φετινή χρονιά με την προσθήκη του ιστορικού σημειώματος. Σκοπός είναι να αποτελέσει μια δραστηριότητα που μπορεί να εξελιχθεί μέσα στο μάθημα της Γεωμετρίας ή μέσα από μια εργασία που δίνεται στους μαθητές. Έχει επίσης σκοπό να συνδυάσει με ρεαλιστικό τρόπο την προσπάθεια των Αρχαίων Ελλήνων να τετραγωνίσουν τον κύκλο με τη δυνατότητα που παρέχει το λογισμικό geogebra να προσομοιώσει τη δυνατότητα αυτή και κυρίως να ελαχιστοποιήσει τον κόπο και τον χρόνο για τις πολλές κατασκευές που απαιτούνται. Καθοριστικό ρόλο εδώ παίζει η δυνατότητα ενσωμάτωσης στο λογισμικό των εργαλείων που δημιουργούνται και επαναχρησιμοποιούνται. Δύναται να επεκταθεί αυτή η εργασία ώστε να καλύψει και τα μη κυρτά πολύγωνα, αλλά και να γίνουν και να αποδοθούν με δυναμικό τρόπο η έλικα του Αρχιμήδη και η τετραγωνίζουσα του Ιππία.

Βιβλιογραφία

Bunt, L. (1981). Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών.Αθήνα: Πνευματικός.

Didactique des Mathématiques, 1970–1990

Dixon, J. K. (1997). Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotation concepts. School Science and Mathematics, 97(7),

Health, T.(2001). Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών.Αθήνα: Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης.

Loria, G.(1971).Ιστορία των μαθηματικών. Αθήνα: ΕΜΕ

Freudenthal H (1973), Mathematics as an educational task, Dordrecht - Holland: Reidel Publishing Company

Nicaise, M. & Barnes, 0. (1996). The Union of Technology, Constructivism, and Teacher Education. Journal of Teacher Education, 47(3), σελ.205 – 212).