Η «χρυσή ευθεία» όπως αναπαρίσταται στο καρτεσιανό επίπεδο

Βλάστος Αιμίλιος Μαθηματικός- Επιμορφωτής Β επιπέδου

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί να δείξει ότι μέσα από μια οργανωμένη διδασκαλία μπορούν να προκύψουν εκπληκτικά αποτελέσματα. Αυτό αφορά τους ίδιους μαθητές και τη συμμετοχή τους, αλλά και τα ίδια Μαθηματικά. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί σταθερό πυλώνα γνώσης ,έμπνευσης και δημιουργικής σκέψης εδώ και δύο χιλιάδες χρόνια. Στην εργασία χρησιμοποιούνται απλές ιδιότητες γωνίες, τριγώνων και κύκλου. Ενώ λοιπόν η αφόρμηση γίνεται με τη γεωμετρία, η αριθμητικοποίησή της (αναλυτική Γεωμετρία) από τον σπουδαίο Γάλλο Μαθηματικό και φιλόσοφο Καρτέσιο, έρχεται με ισχυρότερα εφόδια να λύσει προβλήματα αλλά και να ανακαλύψει νέα, **όπως την αναπαράσταση της «χρυσής ευθείας».** Το μάθημα στηρίζεται στη τεχνολογία, αφού το λογισμικό που χρησιμοποιείται δίνει πολλαπλές αναπαραστάσεις χρήσιμες ώστε να συντελείται πιο εύκολα η μεταφορά εννοιών από το πηγαίο δηλαδή την ενυπάρχουσα γνώση στο στόχο, δηλαδή στην κατανόηση και κατάκτηση της γνώσης από τους μαθητές.

Εισαγωγή

Το μάθημα έγινε στις αρχές Μαρτίου 2015, συμμετείχε ομάδα μαθητών Β Λυκείου, θετικού προσανατολισμού , δύο μαθήτριες Α Λυκείου και σαν απλοί παρατηρητές αρκετοί Μαθηματικοί μεταξύ των οποίων ο σχολικός σύμβουλος. Η διάρκειά του ήταν τρείς ώρες και περιελάμβανε δύο δραστηριότητες που στην παρούσα εργασία θα αναφερθούμε μόνο στη μία. Ο χώρος ήταν μια αίθουσα διδασκαλίας εφοδιασμένη με διαδραστικό πίνακα, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε κυρίως σαν οθόνη προβολής. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν γεωμετρικά όργανα σε μια φάση της διδασκαλίας και ήταν κατανεμημένοι σε ομάδες εργασίας τις οποίες επέλεξαν τυχαία. Οι μαθητές δεν γνώριζαν το περιεχόμενο του μαθήματος. Αυτό φυσικά πρέπει να συμβαίνει σε μια πειραματική διδασκαλία όπου πρέπει να εφαρμόζονται γνωστοί και νέοι τρόποι προσέγγισης της διδασκαλίας και να υπάρχει αυθεντικός διάλογος μεταξύ των συμμετεχόντων.

Στόχοι του Μαθήματος

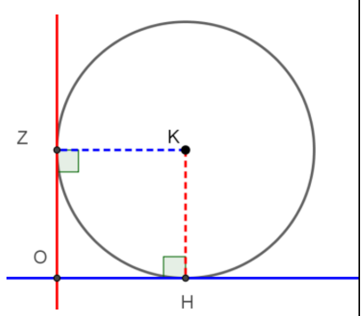
- Η ενεργοποίηση και συμμετοχή όλων των μαθητών. Οι μαθητές να μετέχουν στη συζήτηση και την επίλυση των προβλημάτων.
- Να εργαστούν στο φύλλο εργασίας, στον πίνακα, στον διαδραστικό πίνακα.

- Να αντιληφθούν την ολιστικότητα των Μαθηματικών και ειδικότερα τη διάχυση της Γεωμετρίας σε άλλα πεδία των Μαθηματικών αλλά και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους.
- Να γνωρίσουν κάποια ιστορικά στοιχεία (Αριστοτέλης, Ευκλείδης, Καρτέσιος, Λεονάρντο ντα Βίντσι, χρυσός λόγος) και να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά είναι μια συνεχής και ατέρμονη διαδικασία ιδεών και προσπαθειών.
- Να καταλάβουν τα Μαθηματικά σα πολιτισμικό στοιχείο (αναφορά στην χρυσή τομή σαν ανθρώπινο κατασκεύασμα το οποίο ενυπάρχει και στην φύση).
- Να αποσαφηνίσουν και να εμπεδώσουν γνωστές - άγνωστες έννοιες.
- Τελικά να απολαύσουν το μάθημα συμμετέχοντας σε μια εννοιολογική «γυμναστική».

Ανάλυση της Δραστηριότητας

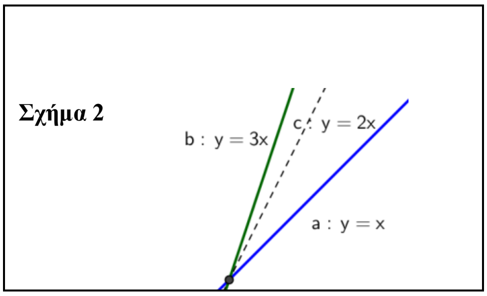
1. Δίνεται στους μαθητές το παρακάτω σχήμα1 στο οποίο το Κ κινείται και μαζί του ο κύκλος, ο οποίος εφάπτεται στους άξονες. Ζητείται από τους μαθητές να εικάσουν πως έγινε η κατασκευή, που κινείται το Κ, από πού αυτό ισαπέχει.

Σχήμα 1
Δυναμικός κύκλος που εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες

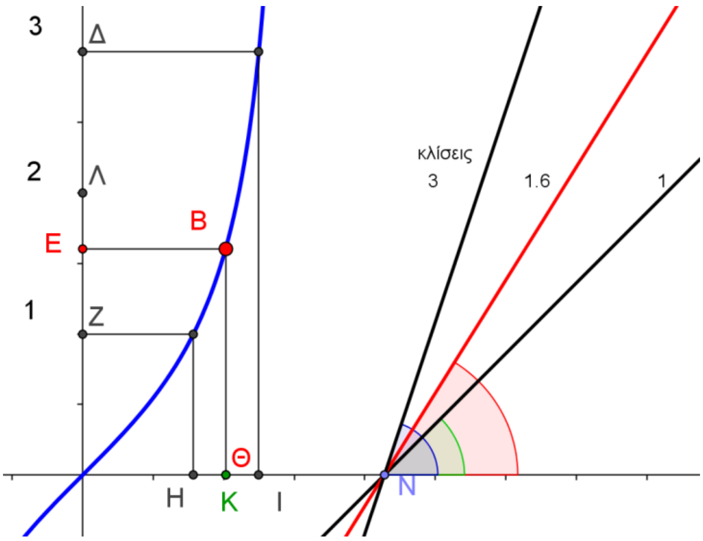


2. Αφού επαναδιαπιστωθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της, ζητείται να κάνουν την ίδια κατασκευή σε σχήμα μεταξύ των y=x, y=0 γεωμετρικά, δηλαδή φέρνοντας τη διχοτόμο και τα κάθετα τμήματα προς τις πλευρές (για ευκολία στην κατασκευή μπορούν να χρησιμοποιήσουν έτοιμο εργαλείο κατασκευής κάθετων τμημάτων- οι μαθητές στο φύλλο εργασίας εργάζονται με κανόνα και διαβήτη). Αποτέλεσμα είναι κύκλος που εφάπτεται στις y=x, y=0 και που στο λογισμικό κινείται δυναμικά διατηρώντας τις ιδιότητες της κατασκευής (εφαπτόμενοι κύκλοι).

3. Δίνεται στους μαθητές σχήμα με την y=x και ζητείται να χαράξουν την y=3x στο φύλλο εργασίας και να την πληκτρολογήσουν στο λογισμικό (Συζήτηση για την κλίση- συντ. δ/νσης) Κατόπιν ζητείται να εικάσουν για την εξίσωση της διχοτόμου της οξείας γωνίας τους. Έχει παρατηρηθεί ότι μια γρήγορη απάντηση πολλών μαθητών είναι η «ενδιάμεση» y=2x. Με το λογισμικό χαράσσουμε την y=2x, οπότε διαισθητικά βλέπουμε ότι δεν είναι αυτή.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

4. Γίνεται συζήτηση γιατί η διχοτόμος δεν είναι η y=2x. Στον πίνακα σχεδιάζουμε τις y=x, y=2x και την διχοτόμο τους ψ=λx. Σκοπός είναι να αναδείξουμε τις σχέσεις των συντελεστών διεύθυνσης με τις γωνίες ως προς τον x΄x. Έστω α, β οι γωνίες των y=x, y=2x . Με κατάλληλες ερωτήσεις οδηγούμαστε ότι η διχοτόμος σχηματίζει γωνία $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και διατυπώνουμε το καίριο ερώτημα αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{2} = 2;$

   Επιπρόσθετα αναλύουμε το θέμα αυτό και με κατάλληλη εφαρμογή στο λογισμικό του geogebra. Στο παραπάνω σχήμα 3 ένα σημείο Β κινείται πάνω στην συνάρτηση εφx, οι γωνίες α=π/4, β, με εφβ=3 αναπαρίστανται με τα Η, Ι. Το Κ είναι μέσο τους και αναπαριστά την $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Όταν η τετμημένη Θ του σημείου Β βρίσκεται στο Κ, η αντίστοιχη τεταγμένη Ε δεν βρίσκεται στο Λ (τεταγμένη 2). Ταυτόχρονα η κίνηση του Β θέτει σε κίνηση την ευθεία y=$\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha+\beta}{2}$ x που διαισθητικά φαίνεται να γίνεται διχοτόμος των y=x, y=3x.

5. Ζητάμε τώρα να γίνει αναλυτική κατασκευή εγγραφής των κύκλων, ανάλογη της γεωμετρικής που είδαμε στην αρχή της δραστηριότητας. Δηλαδή να πληκτρολογήσουμε τις εξισώσεις της διχοτόμου και του κύκλου.

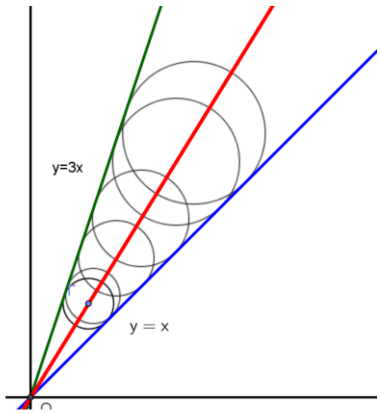
Ποια όμως είναι η εξίσωση της διχοτόμου; Ποιο είναι το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου;

Α τρόπος, βάσει της ιδιότητας της διχοτόμου.

Καθοδηγούμε με βοηθητικές ερωτήσεις να αντιληφθούν ξανά το ζητούμενο, να κάνουν ένα σχέδιο λύσης και να το εκτελέσουν. Μια λύση μπορεί να είναι η παρακάτω: Έστω είναι η y=λx και Ε(k,λk) σημείο της, τότε d(E,y=x)= d(E,y=3x)$\Leftrightarrow \frac{|k-\lambda k|}{\sqrt{2}}=\frac{|3k-\lambda k|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow$

|1-λ|=$\frac{|3-\lambda|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \lambda=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **ο χρυσός λόγος φ≈1,62**

Άρα η εξίσωση της διχοτόμου είναι $y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$, το κέντρο είναι ένα τυχαίο σημείο της Γ και η ακτίνα είναι d(E,y=x)= $\frac{|k-\lambda k|}{\sqrt{2}}$, όπου k=x(Γ) και λ=$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$



σχήμα 4 Η χρυσή ευθεία σαν διχοτόμος της οξείας γωνίας των y=xκαι y=3x

Επειδή είναι σημαντικό οι μαθητές να κάνουν μια ανασκόπηση και επαλήθευση αυτής της λύσης, προτείνεται αυτή να γίνει στο λογισμικό όπου θα έχουν και τη χαρά της δημιουργίας αλλά και του προγραμματισμού

του λογισμικού με τη έννοια ότι «υπακούει» στα Μαθηματικά.
Έτσι για την κατασκευή στο λογισμικό:
Πληκτρολογούμε φ=(5^.5+1)/2 , την y=φx, . Παίρνουμε σημείο Γ πάνω στην y=φx. Για την ακτίνα είναι r=d(Γ,y=φx)= $\frac{|\varphi.x(\Gamma)-x(\Gamma)|}{\sqrt{2}}=\frac{x(\Gamma)|\varphi-1|}{\sqrt{2}}$.
Πληκτρολογούμε $\mathrm{r = x(\Gamma)\ abs(1 - \varphi)\ /\ 2\hat{}0.5}$ και την εξίσωση (x - x(Γ))² + (y - y(Γ))² = r² και το αποτέλεσμα είναι αυτό που θέλαμε. (σχήμα 4)

Β τρόπος με διανυσματικό λογισμό

Με βοηθητικές ερωτήσεις καθοδηγούμε προς ένα σχέδιο λύσης όπως στην παρακάτω προτεινόμενη λύση. Θεωρούμε Μ(1,3), Ο(0,0) σημεία επί της y=3x Λ(1,1) ,Ο(0,0) σημεία επί της y= x Π(1,λ) ,Ο(0,0) σημεία επί της διχοτόμου y= λx και παίρνουμε τα εσωτερικά γινόμενα

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}} = |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|.|\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}|.\text{συνω} \Leftrightarrow 1+3\lambda=\sqrt{\lambda^2+1}.\sqrt{10}\ \text{συνω}$

$\overrightarrow{\mathrm{O\Pi}}.\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}} = |\overrightarrow{\mathrm{O\Pi}}|.|\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}|.\text{συνφ} \Leftrightarrow 1+\alpha=\sqrt{\lambda^2+1}.\sqrt{2}\ \text{συνφ}$

Απαιτώντας ω=φ⇒ $\text{συνω} = \text{συνφ}$, οπότε πάλι παίρνουμε λ $=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varphi$

Γ τρόπος με τριγωνομετρία

Ζητάμε να λυθεί πάλι το πρόβλημα με δοσμένους τους τύπους

$\varepsilon\varphi 2x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi^2 x}$ και $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta}$

Με βοηθητικές ερωτήσεις καθοδηγούμε προς ένα σχέδιο λύσης όπως στην παρακάτω προτεινόμενη λύση
Η ζητούμενη γωνία είναι η x=(α+β)/2, όπου εφα=3, εφβ=1, έτσι

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

$$\text{Όμως}\ \varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta} = \frac{3+1}{1-3.1} = -2$$

Οπότε $\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = -2$ η οποία καταλήγει στην δευτεροβάθμια x^2-x-1=0 που έχει θετική λύση την x= $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varepsilon\varphi\,\frac{\alpha+\beta}{2}$

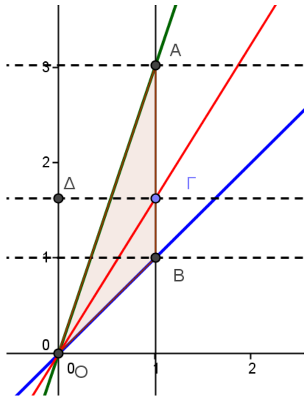
<u>Δ τρόπος, με θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου</u>

Προτρέπουμε να λύσουν οι μαθητές το πρόβλημα με κατάλληλο θεώρημα. Σύμφωνα με τον Polya στο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» (How to solve it) καλό είναι να μη δίνουμε από την αρχή το όνομα του θεωρήματος, αλλά να έρχεται αυτό συζητώντας με τους μαθητές, ρωτώντας για παράδειγμα: «ποιο γνωστό θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτό το τρίγωνο;»

Έτσι μια προτεινόμενη λύση είναι η παρακάτω: Από το (1,0), φέρουμε κάθετο στον χχ΄ και αυτή τέμνει την y=x στο Β, την ζητούμενη διχοτόμο στο Γ, την y=3x στο Α

Στο τρίγωνο ΟΒΑ (σχήμα 5) από το **θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου**:$\frac{B\Gamma}{\Gamma A} = \frac{OB}{OA}$

Αν τώρα Γ(1,λ) Δ(0,λ) είναι ΓΒ=λ-1, ΑΒ=3-λ, ΟΒ=$\sqrt{2}$,ΟΑ=$\sqrt{10}$ οπότε λ= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ άρα η εξίσωση της διχοτόμου ΟΓ: y= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$



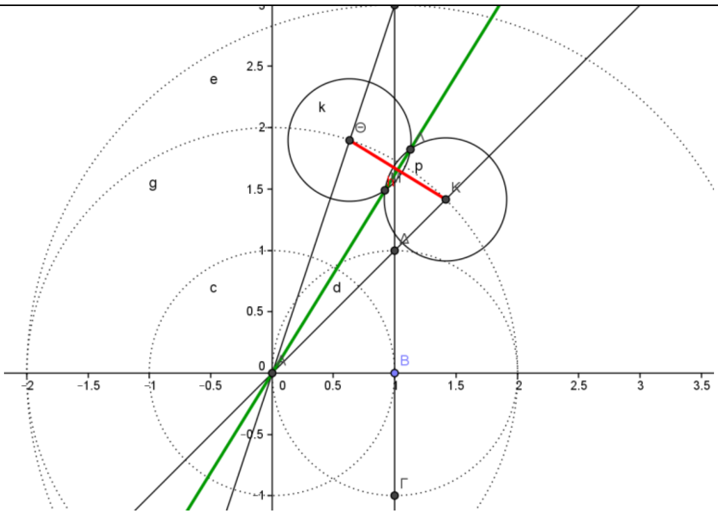
σχήμα 5

Αξιοποίηση της ανακάλυψης

Το γεγονός ότι η διχοτόμος των y=3x, y=x είναι y=φx η αποκαλούμενη στο εξής «χρυσή ευθεία» μπορεί να οδηγήσει την δραστηριότητα σε πολλές κατευθύνσεις.

Ζητάμε από τους μαθητές να κάνουν την παρακάτω κατασκευή: **Δεδομένου ενός καρτεσιανού συστήματος αξόνων να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη η «χρυσή ευθεία» y=φx.**

Μπορούμε να προσαρμόσουμε το λογισμικό ώστε τα μόνα διαθέσιμα εργαλεία να είναι το καρτεσιανό σύστημα αξόνων, ο κύκλος με κέντρο και ακτίνα, το σημείο, η ευθεία, το ευθύγραμμο τμήμα, το εργαλείο κάθετης γραμμής, το εργαλείο για αποτύπωση σημείων τομής. Καθοδηγούμε τους μαθητές να κατασκευάσουν τις ευθείες y=3x, y=x και μετά την διχοτόμο τους όπως αποδείξαμε με τους τέσσερις τρόπους απόδειξης παραπάνω. Γενικά οι κατασκευές δεν ενισχύονται από τα αναλυτικά πλαίσια σπουδών, αλλά χρησιμοποιώντας κατάλληλα το λογισμικό (με τους περιορισμούς των εργαλείων που είναι ισοδύναμα του κανόνα και διαβήτη) η εμπειρία μας σαν διδάσκοντες με ΤΠΕ δείχνει ότι οι μαθητές το χαίρονται, δημιουργούν (σχήμα 6), αλλά κυρίως εφαρμόζουν την θεωρία.



Σχήμα 6
Γεωμετρική κατασκευή της χρυσής ευθείας

Η χρυσή τομή και ο αριθμός φ

Εποικοδομητικό είναι να συζητάμε με τους μαθητές θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών. Η επιστήμη και γενικότερα ο πολιτισμός είναι μια ατέρμονη διαδικασία ιδεών και φυσικά αυτό αφορά και τα Μαθηματικά.

Θαλής , Πυθαγόρας, Πλάτωνας , Αριστοτέλης, Ευκλείδης ήταν σίγουρα τα πρόσωπα που έβαλαν το λιθαράκι τους στην Αξιωματική θεμελίωση των Μαθηματικών. Μια καλή εικόνα για αυτή , μας δίνει ο H. Eves *:*

«καθώς οι παραγωγικοί συλλογισμοί στη Γεωμετρία των Πυθαγορείων αυξάνονταν, και οι λογικές αλυσίδες μάκραιναν και πολλές συμπλέκονταν μεταξύ τους, γεννήθηκε η φοβερή ιδέα , ολόκληρη η Γεωμετρία να καταστεί μια μοναδική αλυσίδα συλλογισμών»

Κατά τον Γερμανό αστρονόμο Johann Kepler το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορούμε να το συγκρίνουμε με μέτρο χρυσού, ενώ την χρυσή τομή σαν ένα πολύτιμο κόσμημα.

Ο αριθμός φ εμφανιζόταν συχνά στη Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων ως η διαίρεση ενός τμήματος σε «άκρο και μέσο λόγο». Έτσι είναι γνωστός από τους Πυθαγόρειους και υπάρχει στις πλευρές του μυστικού τους συμβόλου την πεντάλφα. Στην πορεία των αιώνων η Μαθηματική κοινότητα ασχολείται με αυτόν τον αριθμό. Αντλούμαι από το χρονολόγιο του Hemenway Priya (2005) μερικά στοιχεία τα οποία οι μαθητές τα δέχονται με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ο Φειδίας (490–430 π.Χ.) έφτιαξε τα αγάλματα του Παρθενώνα τα οποία φαίνεται να ενσωματώνουν την χρυσή αναλογία.

Ο Πλάτων (427–347 π.Χ.), στον Τίμαιο, περιγράφει τα πέντε Πλατωνικά στερεά: το τετράεδρο, τον κύβο, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο, και το εικοσάεδρο), κάποια από τα οποία σχετίζονται με την χρυσή τομή.

Ο Ευκλείδης (π. 325–π. 265 π.Χ.), στα Στοιχεία, έδωσε τον πρώτο γραπτό ορισμό της χρυσής τομής, την οποία ονόμασε "ἄκρος καὶ μέσος λόγος"

Ο Φιμπονάτσι (1170–1250) ανέφερε την ακολουθία αριθμών που τώρα φέρει το όνομα του στο βιβλίο του Liber Abaci; ο λόγος διαδοχικών στοιχείων της ακολουθίας Φιμπονάτσι προσεγγίζει ασυμπτωτικά την χρυσή τομή.

Ο Λούκα Πατσιόλι (Luca Pacioli, 1445–1517) καθορίζει την χρυσή τομή ως "Θεϊκή αναλογία" στο ομώνυμο έργο του Divina Proportione.

Ο Γιοχάνες Κέπλερ (1571–1630) αποδεικνύει ότι η χρυσή τομή είναι το όριο της ακολουθίας των λόγων διαδοχικών όρων της ακολουθίας Φιμπονάτσι

Ο Charles Bonnet (1720–1793) επισημαίνει ότι στη φυλλοταξία φυτών που πηγαίνουν με την φορά των δεικτών του ρολογιού και αντίστροφα υπήρχαν συχνά δύο διαδοχικές ακολουθίες Φιμπονάτσι.

Ο Martin Ohm (1792–1872) θεωρείται ότι είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο goldener Schnitt (χρυσή τομή) για να περιγράψει αυτό το λόγο, το 1835.

Ο Édouard Lucas (1842–1891) δίνει στην ακολουθία που τώρα είναι γνωστή ως Φιμπονάτσι το σημερινό της όνομα.

Ο Mark Barr (20ος αιώνας) προτείνει το ελληνικό γράμμα φ, το πρώτο γράμμα του γλύπτη Φειδία για τον συμβολισμό της χρυσής τομής.

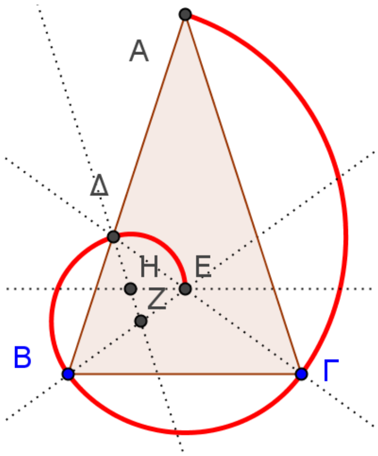
Μετά από αυτές τις ιστορικές αναφορές οι μαθητές καθοδηγούμενοι από τον διδάσκοντα εμπλέκονται σε δημιουργικές κατασκευές υπό μορφή εργασιών. Αναφέρουμε ενδεικτικά :

α) **Τη χρυσή σπείρα στο ορθογώνιο** όπου για την κατασκευή της ξεκινάμε από ένα χρυσό ορθογώνιο(ο λόγος των πλευρών του ισούται με φ), και προχωράμε προς τα μέσα, σχηματίζοντας τετράγωνα που μικραίνουν συνεχώς, στο εσωτερικό του χρυσού ορθογωνίου. Μετά διαγράφουμε τεταρτοκύκλια στα τετράγωνα που σχηματίστηκαν. Στα διαδοχικά χρυσά ορθογώνια, εγγράφεται μια λογαριθμική έλικα η οποία συναντάται συχνά στη φύση όπως στο κέλυφος του σαλιγκαριού, στη διάταξη των σπόρων των ηλίανθων κ.λ.π.

β) **Τη χρυσή ή λογαριθμική σπείρα στο τρίγωνο**.

Έστω ΑΒΓ ένα χρυσό οξυγώνιο τρίγωνο(ο λόγος ΑΓ προς τη βάση ΒΓ ισούται με φ ή εναλλακτικά η γωνία της κορυφής είναι 36^{o}), τότε η διχοτόμος ΓΔ της το διαιρεί σε δύο μικρότερα χρυσά τρίγωνα (ένα οξυγώνιο και ένα αμβλυγώνιο). Αν η διαίρεση αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς τότε δημιουργείται μια σειρά από χρυσά οξυγώνια τρίγωνα.

Με κέντρο το Δ και ακτίνα την ΑΒ τους διαγράφουμε τόξα κύκλων, ώστε οι βάσεις των τριγώνων να είναι χορδές στα τόξα αυτά. Δημιουργείται μια λογαριθμική σπείρα γνωστή ως **equiangular spiral**. Αυτό το όνομα επινοήθηκε το 1638 από τον Γάλλο μαθηματικό και φιλόσοφο Καρτέσιο. Το σπειροειδές αυτό σχήμα βρίσκεται στα μονοκύταρα τρηματοφόρα, στον ηλίανθο, στα συστήματα των αστέρων του γαλαξία, στην διαδρομή που ακολουθεί το γεράκι όταν επιτίθεται τα θηράματά του.



γ) Η σπείρα της ακολουθίας Fibonacci, που δημιουργείται από τετράγωνα με πλευρές 1,1,2,3,5,8,13,…παίρνοντας ημικύκλια στο καθένα.

Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή δεν είχε σκοπό να μετρήσει ποσοτικά αντιδράσεις των μαθητών σε ερωτήσεις που τέθηκαν. Παρουσιάζεται για να αναδείξει: α) Το

ρόλο της Γεωμετρίας στην ιστορία του πολιτισμού μας για πάνω από 2000 χρόνια, τον οποίο πρέπει να αναδεικνύουμε στους μαθητές μας.
β) Τον ολιστικό ρόλο της Γεωμετρίας που καταφέρνει να διεισδύει σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών.
γ) Την ανάδειξη μιας νέας ανακάλυψης- κατασκευής (**«χρυσής ευθείας» στο καρτεσιανό επίπεδο**) μέσα από την προετοιμασία και οργάνωση μιας διδασκαλίας σε μαθητές λυκείου.

Βιβλιογραφία-Πηγές

- G. Polya (1945) How to solve it
- Hemenway, Priya (2005). Divine Proportion: Phi In Art, Nature, and Science. New York: Sterling. σελ. 20–21.
- Howard Eves (1990 3η έκδοση) Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics
- R. Wilder (1996) "Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών"
- Berger Marcel (1987): Geometry I & II, Springer-Verlag Series Universitext.