ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα Θεωρήματα Μη-Πληρότητας του Gödel: Περιεχόμενο και Παρερμηνείες

Αιμίλιος Βλάστος

Επιβλέπων καθηγητής: Καραζέρης Παναγής

ΠΑΤΡΑ

Σεπτέμβριος, 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε
στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος
που απονέμει το
το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο,
Σχολή Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας
«Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά MSc »

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Καραζέρης Παναγής (Επιβλέπων Καθηγητής)	**…**	**…**
2) Μανωλακάκη Ελένη (Β Αξιολογήτρια)	**…**	**…**

«*Χωρίς μαθηματικά, δεν μπορούμε να διεισδύσουμε βαθιά μέσα στη φιλοσοφία.*

Χωρίς φιλοσοφία, δεν μπορούμε να διεισδύσουμε βαθιά μέσα στα μαθηματικά.

Χωρίς και τα δύο, δεν μπορούμε να διεισδύσουμε βαθιά μέσα σε τίποτα»

Leibniz

« *Τα μαθηματικά, είναι η γλώσσα του Θεού με την οποία έγραψε το σύμπαν* ».

Einstein και Gödel συζητώντας στο Princeton (IAS, USA)

Στους

Βίκυ, Μαρκέλλα, Λυδία, Άγγελο

Πρόλογος

Τα μαθηματικά είναι μια ατέρμονη διαδικασία ιδεών και στο πλαίσιο αυτό η συνύπαρξη ασαφών διαισθητικών αντιλήψεων και λογικής, οδήγησε στην αποσαφήνισή τους και την ανάγκη θεμελίωσής τους, στο τέλος του 19ου αιώνα. Επινοήθηκαν τα αποκαλούμενα τυπικά συστήματα, στα οποία, τα θεωρήματα προκύπτουν από τα αξιώματα μέσω ενός αποδεικτικού συστήματος. Ο Gödel κατέδειξε ότι παρουσιάζονται σημαντικές συνέπειες, όταν τα μαθηματικά εξετάζουν τον εαυτό τους. Υπάρχει ένα είδος σύμφυτης αβεβαιότητας όταν τα μαθηματικά περιορίζονται στη μελέτη μόνο των ακριβολογιστικών τους χαρακτηριστικών.

Η παρούσα εργασία μελετά το περιεχόμενο , τις συνέπειες, τις ερμηνείες αλλά και τις παρερμηνείες των θεωρημάτων μη πληρότητας του Gödel . Αποτελεί το τελευταίο στάδιο της τριετούς μου φοιτητικής παρουσίας, στο πλαίσιο της μεταπτυχιακής ειδίκευσης του ΕΑΠ, όπου είχα τη χαρά να συναντήσω νέους συμφοιτητές, τους οποίους ευχαριστώ για τη συνεργασία και τις ωραίες συζητήσεις που είχαμε. Επίσης ευχαριστώ το συνάδελφο μαθηματικό Βασίλη Μανώλη για τη βοήθειά του στην επιμέλεια της εικόνας που απεικονίζει τους Einstein και Gödel, στο Ινστιτούτο ανώτατων σπουδών στο Πρίνστον των Η.Π.Α.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα καθηγητή Παναγή Καραζέρη, του μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστήμιου Πατρών, για τις πολύτιμες συζητήσεις μας, τα σχόλια, τις παρατηρήσεις του και την συνολικότερη βοήθειά του, ώστε η παρούσα εργασία να φτάσει στην τελική της μορφή.

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Οι αριθμοί, γεωμετρικές έννοιες (βασικές μαθηματικές έννοιες) θεωρούνταν έμφυτες στις αρχές του 19ου αιώνα. Η αντίληψη αυτή άλλαξε **με τη δημιουργική αμφισβήτηση** του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη που είναι λογικά ισοδύναμο με την υπόθεση ότι από ένα σημείο εκτός μιας ευθείας στο επίπεδο, μπορεί να αχθεί μόνο μία παράλληλος προς την ευθεία. Από την αρχαιότητα ακόμα αυτό το αξίωμα δεν φαινόταν αυταπόδεικτο και οι μαθηματικοί εργάστηκαν επανειλημμένα για την απόδειξή του. Το έργο των Gauss, Lobachevsky, Bolyai και Riemann απέδειξε ότι, δεν ήταν δυνατό να αποδειχθεί το αίτημα αυτό από τα υπόλοιπα αιτήματα, δημιουργώντας έτσι τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.

Οι επιστημονικές συνέπειες που ακολούθησαν ήταν πολύ σημαντικές. Πρώτα φάνηκε **ότι μπορεί να δοθεί μια απόδειξη για μια πρόταση που δε μπορεί να αποδειχθεί μέσα σε ένα ορισμένο σύστημα αξιωμάτων**. Αυτό έχει μεγάλη αξία αφού και ο Gödel έκανε μια απόδειξη που αποδεικνύει ότι **είναι αδύνατο να αποδειχθούν ή να διαψευστούν ορισμένες προτάσεις της αριθμητικής μέσα σε ένα δεδομένο αξιωματικό σύστημα**. Δεύτερον ανέτρεψαν την τότε καθιερωμένη αντίληψη ότι τα γεωμετρικά αξιώματα αντιπροσώπευαν «αυταπόδεικτες αλήθειες» για τον φυσικό κόσμο, είτε προέρχονταν από τον υπερβατικό κόσμο των ιδεών, είτε ήταν σύμφυτες με την νόηση ως a priori (εκ των προτέρων) ενοράσεις.

Με την εφεύρεση-ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών με εσωτερική λογική συνέπεια, έγινε φανερό ότι ο νους μας δεν αντιλαμβάνεται μία μόνο γεωμετρία. Ο μαθηματικός χώρος έπαψε να αντιστοιχεί σε υπερβατικές καθορισμένες έννοιες, που έπρεπε να ταυτίζονται με το φυσικό χώρο. Οι έννοιες πλέον για τον μαθηματικό ήταν απλά ζήτημα επιλογής αξιωμάτων. Η μαθηματική κοινότητα οδηγήθηκε στην μελέτη αξιωματικών συστημάτων.

Μαθηματικοί και φιλόσοφοι από την αρχαιότητα αναρωτήθηκαν αν οι φυσικοί αριθμοί είναι δημιουργήματα του νου μας, ή μορφές που ενυπάρχουν στην φύση ανεξάρτητα από την σκέψη μας. Ο Leopold Knonecker είπε κάποτε *«Τους φυσικούς αριθμούς έφτιαξε ο καλός Θεός ,όλα τα άλλα είναι έργο του ανθρώπου».*

Τους φυσικούς αριθμούς θεώρησαν πολλοί μαθηματικοί και φιλόσοφοι σαν βάσεις ώστε να χτίσουν το οικοδόμημα της θεμελίωσης των μαθηματικών, με βάση τη λογική. Έτσι προς το τέλος του 19ου αιώνα δημιουργήθηκε το πρώτο αξιωματικό σύστημα για τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό το εισηγήθηκαν ανεξάρτητα μεταξύ τους ο Γερμανός Richard Dedekind και ο Ιταλός Guseppe Peano. Τα πέντε αξιώματα που επέλεξε ο Dedekind, τα εξέφρασε αργότερα ο Peano σε συμβολική γλώσσα με αποτέλεσμα την απόδοση επτά αξιωμάτων.

Η προσπάθεια των μαθηματικών σε αυτά τα αξιωματικά συστήματα εστιαζόταν στο να: α) να μην προκύπτουν αντιφατικές προτάσεις, δηλαδή **να είναι συνεπή** και β) να μπορούν να αποδείξουν ή να απορρίψουν όλες τις προτάσεις που θα μπορούσαν να διατυπωθούν από ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων, δηλαδή **να είναι πλήρη.**

Τα παράδοξα που εμφανίστηκαν στη θεωρία του Cantor, μαζί με την πρόοδο της Συμβολικής Λογικής κατά τον 19ο αιώνα οδήγησαν αναγκαία σε μία προσπάθεια τυπικής αξιωματικοποίησης των μαθηματικών, ώστε να μη προκύπτουν εσφαλμένα συμπεράσματα. **Έγινε σταδιακά σαφές ότι ο ρόλος του καθαρού μαθηματικού είναι να παράγει θεωρήματα από αξιωματικοποιημένες παραδοχές και δεν είναι στη δικαιοδοσία του να εξετάζει αν τα αξιώματα είναι πράγματι αληθή**. Η όλη αποδεικτική διαδικασία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η συντακτική παραγωγή συμβολικών εκφράσεων από άλλες συμβολικές εκφράσεις, μέσα από συμπερασματικούς κανόνες.

Οι περισσότεροι μαθηματικοί στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, πίστευαν ότι τα καθιερωμένα αξιωματικά συστήματα ήσαν συνεπή και πλήρη. και επομένως επαρκούσαν για να αποφασισθεί η αλήθεια ή το ψεύδος οποιασδήποτε καλά διατυπωμένης πρότασης. Αυτή την διαδεδομένη αντίληψη εξέφρασε ο David Hilbert, γράφοντας το 1925: *«Κάθε μαθηματικός συμμερίζεται την πεποίθηση ότι κάθε σαφές μαθηματικό πρόβλημα έχει αναγκαστικά την δυνατότητα να μπορεί λυθεί»*.

Όμως αυτές τις πεποιθήσεις ήρθαν να ανατρέψουν δύο σημαντικά αποτελέσματα της Μαθηματικής Λογικής: η θεωρία των Löwenheim-Skolem[1] και το θεώρημα μη πληρότητας της Αριθμοθεωρίας του Gödel.

Το 1931, ο Αυστριακός Kurt Gödel δημοσίευσε μία εργασία, που ανέτρεψε την αντίληψη ότι ένα αξιωματικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί πλήρως με ένα σύστημα αξιωμάτων. Σύμφωνα με το πρώτο Θεώρημα Μη Πληρότητας του Gödel, για κάθε επαρκή φορμαλιστική θεωρία, που περιλαμβάνει τη θεωρία των ακέραιων

[1] θέτει υπό αμφισβήτηση το εάν μπορούμε να έχουμε καθορισμένη και μη διφορούμενη ερμηνεία για εκφράσεις όπως «φυσικός αριθμός», «πραγματικός αριθμός», «σύνολο», κ.λπ.

αριθμών, αν είναι συνεπής, τότε είναι υποχρεωτικά μη πλήρης. Κατόπιν απέδειξε ότι είναι αδύνατο να εδραιωθεί η εσωτερική συνέπεια μιας εκτενούς κλάσης παραγωγικών συστημάτων, όπως η στοιχειώδης αριθμητική, εκτός αν καταφύγουμε σε αρχές που βρίσκονται έξω από το σύστημα που εξετάζουμε, ή η εσωτερική τους συνέπεια είναι αμφίβολη. Αυτό έκανε τον φυσικομαθηματικό Herman Weyl να πει ότι: *«ο Θεός υπάρχει γιατί τα μαθηματικά είναι αναμφίβολα συνεπή και ο Διάβολος υπάρχει γιατί δεν μπορούμε να αποδείξουμε την συνέπεια»*.

Η συλλογιστική της απόδειξης ήταν τόσο καινοφανής ώστε ακόμα και οι ειδικοί στη λογική εκείνης της εποχής με δυσκολία μπόρεσαν να την καταλάβουν. Στην απόδειξή του ο Gödel κωδικοποίησε αριθμητικά όλες τις προτάσεις του εκάστοτε φορμαλιστικού συστήματος Αριθμοθεωρίας και το έκανε να «μιλήσει» για τον εαυτό του. Σε κάθε τύπο του συστήματος που εξέτασε, αντιστοίχησε έναν φυσικό αριθμό και σε κάθε ακολουθία τύπων, που αποτελούν μία απόδειξη, αντιστοίχησε παρόμοια έναν πιο σύνθετο αριθμό. Επιπρόσθετα, προτάσεις που αφορούν ιδιότητες των κωδικών αριθμών μπορούν να ερμηνευτούν στην καθημερινή γλώσσα ως προτάσεις σχετικά με την δομή του αξιωματικού συστήματος. Αυτή η μη απλή γλώσσα που μελετά, όχι μόνο τις ιδιότητες φυσικών αριθμών, αλλά κυρίως την δομή αξιωματικών συστημάτων, είναι γνωστή ως «**μεταμαθηματικά**».

Ενώ η φορμαλιστική γλώσσα αφορά μόνο τη σύνθεση τύπων με βάση κάποιους συντακτικούς κανόνες, **η γλώσσα των μεταμαθηματικών είναι μια καθομιλούμενη γλώσσα, που αποδίδει νοήματα**. Οι προτάσεις της δεν υπόκεινται σε συντακτικούς κανόνες, η αλήθεια τους ή όχι εξαρτάται και από το νόημα των επί μέρους λέξεων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή τους. Το νόημα κάποιων θεμελιωδών εννοιών θα πρέπει να πηγάζει από μίαν άμεση επίγνωσή τους, χωρίς λεκτικό ορισμό. Αυτή η άμεση επίγνωση ονομάζεται συνήθως «ενόραση» ή «διαίσθηση». Οι έννοιες που περιλαμβάνονται στην γλώσσα των μεταμαθηματικών ανάγονται τελικά σε «διαισθητική» κατανόηση των εννοιών «φυσικός αριθμός», «μοντέλο», «ερμηνεία ενός τύπου» κ.λ.π.

Ο Gödel κατασκεύασε τον τύπο G(x), που η ερμηνεία του στην γλώσσα των μεταμαθηματικών είναι ότι η πρόταση με τον τυχαίο κωδικό αριθμό x δεν αποδεικνύεται. Στην συνέχεια προσδιόρισε τον κωδικό αριθμό g της G(x) και δημιούργησε την G(g). Αυτή η πρόταση που κατασκεύασε, λέει σε μεταμαθηματική ερμηνεία, ότι η πρόταση με τον δικό της κωδικό αριθμό, δεν είναι αποδείξιμη. Δηλαδή η G(g) λέει για τον εαυτό της ότι δεν είναι τυπικά αποδείξιμη. Όμως η πρόταση G(g) είναι **«μη αποκρίσιμη»,** γιατί ούτε αυτή ούτε η άρνησή της μπορούν να αποδειχθούν. Αυτό όμως σημαίνει ότι το δεδομένο τυπικό σύστημα, αν είναι συνεπές δεν θα είναι πλήρες. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως πρώτο θεώρημα μη πληρότητας.

Η αριθμητική πρόταση G(g), παρά το ότι δεν μπορεί να αποδειχθεί στην τυπική γλώσσα, είναι αληθής αφού είναι ορθή η ερμηνεία της στην μεταμαθηματική, γλώσσα που μελετά την δομή του τυπικού συστήματος.

Η μη πληρότητα δεν μπορεί να αποφευχθεί με προσθήκη της παραπάνω μη αποκρίσιμης πρότασης στα αξιώματα του συστήματος. Αυτό γιατί και στο νέο διευρυμένο σύστημα αξιωμάτων, θα ήταν δυνατή η κατασκευή μιας νέας μη αποκρίσιμης πρότασης, οπότε είναι αναπόφευκτες οι μη αποκρίσιμες προτάσεις.

Ο Godel προχώρησε και ένα βήμα παραπέρα, απέδειξε ότι η μεταμαθηματική πρόταση: «η αριθμητική είναι συνεπής» είναι ισοδύναμη με ένα τύπο στο αξιωματικό σύστημα, που είναι σαν τη G(g) δηλαδή **αποδείξιμα μη αποδείξιμος**. Το συμπέρασμα βέβαια είναι ότι αν η αριθμητική είναι συνεπής, η συνέπεια της δεν μπορεί να αποδειχθεί με κανένα μεταμαθηματικό συλλογισμό, αλλά μόνο με την βοήθεια συλλογιστικών αρχών που δεν μπορούν να «απεικονισθούν» μέσα στην τυπική αριθμητική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας και ισχύουν για κάθε κλάδο των μαθηματικών, αφού οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν τη βάση για όλα τα μαθηματικά.

Το 1936 οι Alonso Church και Alan Turing ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, έδειξαν ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος (μηχανιστική υπολογιστική διαδικασία) που να αποφασίζει αν κάθε ειδική πρόταση μπορεί να αποδεικνύεται ή όχι από το δοσμένο αξιωματικό σύστημα. Πέρα από τις μη αποκρίσιμες προτάσεις που κατασκεύασε ο Gödel μπορεί να υπάρχουν σε ένα τέτοιο τυπικό σύστημα και άλλες μη αποκρίσιμες προτάσεις. Αλλά δεν μπορούμε να διαπιστώσουμε εκ των προτέρων ποιές είναι μη αποκρίσιμες.

Δομή της εργασίας

Η εργασία χωρίζεται σε έξι βασικά μέρη-κεφάλαια, συγκεκριμένα:
Το **πρώτο μέρος** παρουσιάζει την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών από την αρχαιότητα όπου μπήκαν τα θεμέλια, ως τα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα όπου ο άνθρωπος βρήκε τον τρόπο να μπορεί να κατανοεί το άπειρο. Ως τότε οι άνθρωποι το αντιλαμβάνονταν ως κάτι που βρίσκεται έξω από τις δυνατότητές τους να το συλλάβουν. Η θεωρία του άπειρου από τον Cantor είναι αυτή που μας έδειξε ότι το άπειρο έχει και αυτό μεγέθη και πολλοί τη θεωρούν ως μια σπουδαία επαναστατική ενέργεια της σύγχρονης εποχής, τουλάχιστον όσον αφορά τα μαθηματικά. Παρουσιάζει και τα φιλοσοφικά ρεύματα των μαθηματικών μέχρι τα μέσα του εικοστού αιώνα, εποχή που εμφανίστηκαν τα θεωρήματα μη- πληρότητας του Kurt Gödel. Τα αποτελέσματα των θεωρημάτων αυτών κρίθηκαν εντυπωσιακά και αναδύθηκε η ανάγκη για τη φιλοσοφική κατανόηση του χαρακτήρα της θεμελίωσης των μαθηματικών αλλά και έθεσε πάλι επί τάπητος το θέμα της «κατασκευής», της «ανακάλυψης» και της «επινόησης» της μαθηματικής αλήθειας. Τέλος γίνεται μια αναφορά στη ζωή και το έργου του Godel.

Το **δεύτερο μέρος** περιέχει βασικά στοιχεία από τα δύο μέρη της λογικής, την Προτασιακή Λογική και την Κατηγορηματική Λογική (Α΄θμια λογική), την οποία χρησιμοποίησε ο Frege για την θεμελίωση των φυσικών αριθμών. Γίνεται αναφορά στην πρώτη παρουσίαση των ΘΜΠ[2] από τον Gödel το 1930 και την πρώιμη υποδοχή τους. Αναφέρεται η ιδέα της τυπικής αξιωματικοποιήσιμης θεωρίας, οι αποκρίσιμες προτάσεις, η πληρότητα, η μη πληρότητα, οι επαρκώς ισχυρές θεωρίες με την ορθότητά ή την συνέπειά τους.

Στο **τρίτο μέρος** παρουσιάζεται το πρώτο ΘΜΠ από σημασιολογικής πλευράς και η απόδειξή του, που είναι βέβαια ασθενέστερη από την απόδειξη του πρώτου ΘΜΠ από συντακτικής πλευράς. Αλλά η ιδέα της απόδειξης αυτής υποδηλώνει ότι μια ισχυρή αποτελεσματική θεωρία, είναι ικανή να μπορεί να συλλάβει μια ιδιότητα που όμως δεν είναι αποκρίσιμη.

Στο **τέταρτο μέρος** παρουσιάζονται οι αριθμητικές Robinson (Q) και Peano (PA) που έχουν κοινή γλώσσα την L_A, που περιέχει την + , τον * και την διάδοχο συνάρτηση. Η Q αποδεικνύεται ότι είναι μη πλήρης χωρίς να χρειαστούμε τα ισχυρά

[2] Θεωρήματα μη πληρότητας.

επιχειρήματα του Gödel. Προσθέτοντας σε αυτή το αξίωμα της επαγωγής προκύπτει η PA που μπορεί να αποδείξει όλους τους γνωστούς αριθμητικούς ισχυρισμούς. Πριν τον Gödel η PA θεωρούνταν μια ισχυρή και πλήρης θεωρία.. Η Q άρα και η PA αποδεικνύουν κάθε αληθή Σ_1 πρόταση, ενώ κάθε θεωρία T που περιλαμβάνει την Q αποδεικνύει κάθε αληθή Π_1 πρόταση. Οι πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν από τον Gödel και αυτές αποφασίζουν αν υπάρχουν ιδιότητες ή σχέσεις. Οι πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι υπολογίσιμες (αλλά δεν είναι οι μόνες), εκφράζονται και καταγράφονται από μια θεωρία που περιέχει την Q.

Στο **πέμπτο μέρος** παρουσιάζεται η τυπική απόδειξη του 1ου ΘΜΠ. Ορίζονται πρωταρχικές αναδρομικές αριθμητικές σχέσεις, όπως η *Prf(m,n)* που χρησιμοποιεί τον αριθμό m για να κωδικοποιήσει αν μια πρόταση με κωδικό αριθμό n είναι απόδειξη στην PA, Η Gdl(x,y) που εκφράζεται από κάποιους Σ_1 κδτ και καταγράφει την *Gdl(m,n)*, η οποία ορίζεται ως *Prf(m, diag(n))*, δηλαδή ορίζεται ως ο ο αριθμός Gödel m, της απόδειξης της διαγωνοποίησης του κδτ με αριθμό Gödel το n. Στη συνέχεια ορίζεται η $U(y) =_{\text{ορισμός}} \forall x \neg Gdl(x, y)$, κατασκευάζεται η πρόταση Gödel διαγωνοποιώντας την U, με όνομα G και τύπο που ορίζεται ως $U(\overline{\ulcorner U \urcorner}) = \forall x \neg Gdl(x, (\overline{\ulcorner U \urcorner}))$. Με την ασθενέστερη παραδοχή ότι η PA είναι συνεπής, δεν αποδεικνύεται η G. Με την ισχυρότερη παραδοχή ότι η PA είναι ω-συνεπής, τότε η PA δεν αποδεικνύει την άρνηση της G και αυτή είναι η συντακτική απόδειξη ότι η PA δεν είναι πλήρης. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί και σε άλλες πρωταρχικά αναδρομικές. αξιωματικές θεωρίες που περιέχουν την Q. Ακολουθεί το λήμμα διαγωνοποίησης που είναι ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε το 1ο ΘΜΠ, το οποίο είναι ενδιαφέρον, γιατί οδηγεί στο θεώρημα του Rosser.

Το **έκτο μέρος** αφορά τις ερμηνείες, συνέπειες και παρερμηνείες των ΘΜΠ. Θα απαιτηθούν πολλά χρόνια για να γίνει κατανοητή η φιλοσοφία του Gödel, σύμφωνα με τον βιογράφο και φίλο του, Hao Wang. Το κεφάλαιο περιέχει κλασσικές παρερμηνείες των ΘΜΠ και καταγράφει την ορθή αντιμετώπισή τους. Υπό το πρίσμα των ΘΜΠ καταγράφει, τη σχέση ανθρώπινου νου, ανθρώπινης σκέψης με τους υπολογιστές, τις μηχανές Turing και γενικά την υπολογισιμότητα. Πραγματεύεται την σχέση των ΘΜΠ με τις αυτοαναφορικές προτάσεις, χωρίς όμως την κατάληξη σε λογικές αντιφάσεις. Επίσης αναφέρεται στις συνέπειες των ΘΜΠ, στην φιλοσοφία των μαθηματικών και κυρίως στον φορμαλισμό του Hilbert. Τέλος καταγράφει τον φιλοσοφικό στόχο των θεωρημάτων μη πληρότητας.

Είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι μεγάλο μέρος από τα κεφάλαια 3,4,5 υιοθετούν την φιλοσοφία και τον συμβολισμό που ανέπτυξε ο καθηγητής του Πανεπιστημίου του Cambridge, Peter Smith, όπως αναγράφονται στις σημειώσεις του με τίτλο, «*Gödel Without (Too Many) Tears*».

Κεφάλαιο 1. Τα μαθηματικά μέχρι τον Gödel

1.1 Η εξέλιξη των μαθηματικών

Η επιστήμη και γενικότερα ο πολιτισμός είναι μια ατέρμονη διαδικασία ιδεών και φυσικά αυτό συμπεριλαμβάνει τα μαθηματικά. Τα Μαθηματικά σαν πολιτισμικό στοιχείο και σαν το παλαιότερο μέλος της επιστημονικής οικογένειας δέχθηκαν επιδράσεις όχι μόνο εξαιτίας του φυσικού περιβάλλοντος αλλά και από το πολιτιστικό περιβάλλον και από τις σχέσεις τους με άλλες επιστήμες και ιδιαίτερα από τη φυσική.

«Αν είδα μακρύτερα, είναι επειδή στάθηκα στους ώμους γιγάντων» έγραφε [17] το 1676 ο Isaac Newton σε μια επιστολή προς τον Robert Hooke. Αναφερόταν φυσικά στους σύγχρονούς του, Galileo Galilei και Johann Kepler, αλλά και τους προγενέστερους.

Τα πρόσωπα που έβαλαν το λιθαράκι τους στην Αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας ήταν σίγουρα οι Θαλής, Πυθαγόρας, Πλάτωνας, Αριστοτέλης, Ευκλείδης και Αρχιμήδης. Μια καλή εικόνα για αυτή τη θεμελίωση, μας δίνει [13] ο H. Eves. :

«καθώς οι παραγωγικοί συλλογισμοί στη Γεωμετρία των Πυθαγορείων αυξάνονταν, και οι λογικές αλυσίδες μάκραιναν και πολλές συμπλέκονταν μεταξύ τους, γεννήθηκε η φοβερή ιδέα , ολόκληρη η Γεωμετρία να καταστεί μια μοναδική αλυσίδα συλλογισμών»

Την αξιωματική μέθοδο την ανέπτυξε θεωρητικά ο Αριστοτέλης που βρήκε στα μαθηματικά εξαιρετικό έδαφος για τη μελέτη της τυπικής λογικής, αφού η μαθηματική απόδειξη ήταν ένας αυστηρός λογικός συλλογισμός. Το θεωρητικό πλαίσιο της αξιωματικής μεθόδου, (η οποία υπήρξε η μεγαλύτερη συνεισφορά των Αρχαίων Ελλήνων στα μαθηματικά), το βρίσκουμε στα «Αναλυτικά ύστερα» του Αριστοτέλη. Είναι ο τρόπος που οργανώνεται ένα παραγωγικό σύστημα, το οποίο διαφέρει από μια απλή συλλογή προτάσεων. Εκεί παρουσιάζονται οι «πρώτες αρχές» που θα πρέπει να πληροί κάθε αποδεικτική επιστήμη, οι οποίες κατ' ουσία είναι ίδιες. Αυτές θα πρέπει να στρέφονται γύρω από τρία πράγματα:

α) ορισμοί οι οποίοι απλά εξηγούν τη σημασία των όρων που εμπλέκονται στο εγχείρημα (πχ ο ορισμός στα «Στοιχεία»: οξεία είναι μια γωνία μικρότερη της ορθής γωνίας), β) οι κοινές αρχές που είναι γενικές αρχές που ισχύουν σε κάθε επιστήμη και θεωρούνται αυταπόδεικτες (πχ αν σε ίσα προστεθούν ίσα, προκύπτουν ίσα) γ) τα αξιώματα για τα οποία η επιστήμη θεωρεί δεδομένη τη σημασία τους και συνδέονται με μια συγκεκριμένη επιστήμη. Για παράδειγμα, στην κλασσική μηχανική, τα Αριστοτελικά αξιώματα είναι οι νόμοι του Νεύτωνα.

Ο Ευκλείδης εφάρμοσε τη διδασκαλία του Αριστοτέλη στο διάσημο και αιώνιο έργο του τα «Στοιχεία». Οι 465 προτάσεις που περιέχονται στα «Στοιχεία» εξάγονται λογικά από τις πρώτες αρχές της αξιωματικής μεθόδου (ορισμοί, κοινές αρχές και αξιώματα). Σε αυτό το έργο θεμελίωσε τη θεωρία της Γεωμετρίας σε ένα ασφαλές λογικό σύνολο, βασισμένο στα πέντε αιτήματά του, που αποτέλεσε το φάρο μιας παγκόσμιας παραδοχής: **«Επιστήμη είναι η γνώση που θεμελιώνεται πάνω σε μερικές γενικές αρχές και παράγεται με τη λειτουργία των νόμων της Λογικής μέσα σε ένα σύνολο από σχετικές έννοιες».** Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη διεκδικούν αναμφισβήτητα μία θέση ανάμεσα στις μεγάλες στιγμές της θεμελίωσης των μαθηματικών, αφού το περιεχόμενο και η μορφή τους επέδρασαν εντυπωσιακά στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας και της λογικής θεμελίωσης των μαθηματικών. Τα επόμενα χρόνια αναπτύχθηκε ανώτερη γεωμετρία (δηλαδή γεωμετρία καμπυλών, διαφορετικών από την ευθεία γραμμή και τον κύκλο και γεωμετρία επιφανειών, διαφορετικών από το επίπεδο και τη σφαίρα). Κατά «περίεργο» τρόπο, ένα μεγάλο μέρος αυτής της ανώτερης γεωμετρίας δημιουργήθηκε από τις άκαρπες προσπάθειες να λυθούν τρία διάσημα και προκλητικά προβλήματα της αρχαιότητας που είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου , η τριχοτόμηση γωνίας δίνοντας έτσι περιεχόμενο **στην αρχή που θέλει την ανάπτυξη των μαθηματικών να υποκινείται από την παρουσία προκλητικών άλυτων προβλημάτων.**

Η μετάφραση των «Στοιχείων» στα λατινικά και η διαρκής μελέτη τους από τους μαθηματικούς κυρίως της Δύσης ήταν ένα κομβικό σημείο, τα μαθηματικά πέρασαν στη Δύση. Αναπτύχθηκε η Άλγεβρα, υπήρξε διαρκής εξέλιξη των συμβόλων. Όσο όμως πιο αφαιρετικά και θεωρητικά οδηγούνταν τα Μαθηματικά τόσο υπήρχε κίνδυνος κρίσης στη θεμελίωσή τους.

Μια αναζωογόνηση των μαθηματικών έγινε κατά το 17ο αιώνα, με τις ανακαλύψεις που έκαναν δύο διαπρεπείς μαθηματικοί επιστήμονες, ο Galileo Galilei και ο Johann Kepler. Οι ανακαλύψεις του Γαλιλαίου οδήγησαν στη δημιουργία της σύγχρονης επιστήμης της δυναμικής και οι ανακαλύψεις του Kepler στη δημιουργία της σύγχρονης ουράνιας μηχανικής. Καθεμία απ’ αυτές τις μελέτες για να αναπτυχθεί, απαίτησε να δημιουργηθούν νέα μαθηματικά εργαλεία, **ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός,** ώστε να μπορούν να χειριστούν η μεταβολή, η ροή και η κίνηση. Οι εργασίες των Newton, Leibniz στα απειροστά[3] άνοιξε το δρόμο για τον διαφορικό λογισμό. Η θεμελίωσή τους έγινε χάρη στο έργο των Cauchy[4] και Weierstrass και Riemann που αναδιαμόρφωσαν τον απειροστικό και διαφορικό λογισμό με βάση τα όρια και όχι τα απειροστά, με τον ορισμό της συνέχειας[5] και ενός πρωτότυπου (ε, δ)-ορισμού.

Ένας νέος τύπος μαθηματικών άρχισε πια να υπάρχει, τα παλιότερα μαθηματικά ασχολούνται με το σταθερό και το πεπερασμένο, ενώ τα νεότερα αγκαλιάζουν τη μεταβολή και το άπειρο και δημιουργούν τον κλάδο της Ανάλυσης.

Από την αρχή του $18^{ου}$ έως και τον $19^{ο}$ αιώνα οι επικρατέστερες θεωρίες (ρητά διατυπωμένες ή όχι) σχετικά με τα θεμέλια της Ανάλυσης είναι δύο:
α) Η θεωρία του Leibniz, η οποία από το Αρχιμήδειο συνεχές επεκτάθηκε σ' αυτό που σήμερα ονομάζουμε «μη-Αρχιμήδειο Σώμα», προσθέτοντας τα απειροστά και τους άπειρα μεγάλους αριθμούς. β) Η θεωρία του Weierstrass, η οποία είναι μέχρι και σήμερα αποδεκτή. Με σημερινούς όρους, ο Leibniz κατασκεύασε τον σκελετό[6] της θεωρίας των υπερ-πραγματικών αριθμών, ενώ ο Weierstrass ανέπτυξε και ολοκλήρωσε την θεωρία των πραγματικών αριθμών στην Ανάλυση.

Από τους Weierstrass, Cauchy, Cantor αναπτύχθηκαν επίσης οι θεωρίες των ορίων άπειρων ακολουθιών που εξηγούσε επιστημονικά νευτώνειες έννοιες όπως το σημείο και η στιγμιαία ταχύτητα. Αλλά αυτό που διεγείρει το ανθρώπινο μυαλό είναι το άπειρο, με το οποίο ασχολήθηκαν οι Μαθηματικοί από την Αρχαιότητα ακόμη, αλλά είτε το απέφευγαν είτε δεν μπορούσαν να το ερμηνεύσουν. Για παράδειγμα οι δύο σειρές που ακολουθούν, έχουν άθροισμα πεπερασμένο, άπειρο αντίστοιχα αν και προστίθενται άπειροι στο πλήθος θετικοί αριθμοί που κάθε φορά «εκφυλίζονται».
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\ldots=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=+\infty$

[3] Τα απειροστά (απείρως μικρά ποσά) που είναι μηδενικά με την έννοια ότι δεν μπορούν να είναι παρονομαστές, αλλά συμπεριφέρονταν ως μηδενικά. (ο Leibniz, όπως παρατηρεί ο Carl Boyer, δεν αποδεχόταν ότι τα απειροστά μπορεί να είναι απολύτως ίσα με μηδέν, παρά μόνο σε σχέση με άλλες ποσότητες)
[4] μέχρι τον Cauchy, η αντίληψη γύρω από την έννοια του ορίου, παρέμεινε ευρέως γεωμετρική (γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας του ορίου)
[5] Ο Bolzano έδωσε τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης και για πρώτη φορά έγινε σαφές ότι η έννοια της συνέχειας προϋποθέτει γνώση της έννοιας του ορίου
[6] Ο Δ. Αναπολιτάνος (2005, σελ.115) αναφέρει χαρακτηριστικά: «…Η φύση των απειροστών δεν ξεκαθαρίστηκε ποτέ από τον Leibniz και εκείνο που πιο πολύ τα στήριζε ήταν ...η αδιαμφισβήτητη επιτυχία τους στο επίπεδο της μαθηματικής πρακτικής. Οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν για τον υπολογισμό παραγώγων και ολοκληρωμάτων δεν είχαν θεμελιωθεί με στέρεο τρόπο και οι αντιρρήσεις που εγέρθηκαν ήταν και πολλές και δίκαιες».

«*Ανέκαθεν το άπειρο διέγειρε την ανθρώπινη ψυχή, περισσότερο από κάθε άλλο ζήτημα. Δύσκολα μπορεί να βρεθεί μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα το λογικό, όσο αυτή του απείρου. Εν τούτοις, καμία άλλη έννοια δεν χρειάζεται διαφώτιση, όσο αυτή*» ανέφερε ο David Hilbert στο ιστορικό του άρθρο «*On Infinity*» (για το άπειρο).

1.2 Ο Cantor και το άπειρο

Η αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού από τον Weierstrass επαναφέρει την έννοια του δυνητικού άπειρου και απομακρύνει το ενεργεία άπειρο. Και όμως το άπειρο εξακολουθούσε να εμφανίζεται στην άπειρη αριθμητική ακολουθία που ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς και στην έννοια του ίδιου του συστήματος των πραγματικών αριθμών, το οποίο θεωρείται ότι αποτελεί ολότητα πλήρη και κλειστή που δίνεται με μιας. Όπως αναφέρει [6] ο Hilbert: *«Το (ενεργεία) άπειρο κατάφερε, μεταμφιεσμένο να τρυπώσει ξανά στη θεωρία του Weierstrass και να ξεφύγει τον αυστηρό έλεγχο της κριτικής του»*. Εκείνος που συνέβαλε με μοναδικό τρόπο στην αναγέννηση του ενεργεία απείρου στα μαθηματικά ήταν ένας μαθητής των Dedekind και Weierstrass, ο Cantor.

Οι Cantor, Frege, Dedikind πρότειναν την θεωρία για τους πραγματικούς όπου οι ρητοί περιγράφονται ως άπειρες ακολουθίες φυσικών αριθμών και οι άρρητοι επίσης ως άπειρες ακολουθίες ρητών αριθμών, γεγονός με μεγάλη σημασία αφού μόνο οι πραγματικοί μπορούν να περιγράψουν ολοκληρωμένα το φυσικό συνεχές του χρόνου και του χώρου.

Στην προσπάθεια του να διασαφηνίσει την έννοια του απείρου, ο Cantor δημιούργησε έναν νέο κλάδο των μαθηματικών, την Θεωρία Συνόλων[7]. Η έννοια του συνόλου υπήρχε από παλαιότερα στα μαθηματικά, όμως επικρατούσε η αντίληψη ότι το περιεχόμενο ενός συνόλου δεν θα μπορούσε παρά να είναι πεπερασμένο σε πλήθος. Ο Cantor δημιούργησε σύνολα που περιείχαν άπειρα στοιχεία. Μέχρι τότε

[7] Η θεωρία συνόλων αποτελεί τη βάση για τα μοντέρνα μαθηματικά, με την έννοια ότι ερμηνεύει προτάσεις μαθηματικών αντικειμένων (όπως οι αριθμοί και οι συναρτήσεις) από όλους τους τομείς των παραδοσιακών μαθηματικών (όπως της Άλγεβρας, της Μαθηματικής Ανάλυσης και της Τοπολογίας) σε μία ενιαία θεωρία, και παρέχει ένα σύνολο από αξιώματα προς απόδειξη ή όχι.

υπήρχαν μόνο πεπερασμένα σύνολα ενώ τα «άπειρα» συμπεριελάμβαναν θέματα κυρίως για θεολογικό[8]-φιλοσοφική, παρά μαθηματική, συζήτηση.

Η πρώτη σύγκρουση του Cantor με την μαθηματική παράδοση δύο χιλιάδων χρόνων ήταν πως το άπειρο εκτός από «δυνητικό» είναι και «υπαρκτό». Υποστήριξε ότι υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός ℵ*ο* (Άλεφ Μηδέν) που αριθμεί το σύνολο των φυσικών και αυτός δεν είναι φυσικός αλλά υπερφυσικός (υπέρ-περασμένος). Κατόπιν απέδειξε ότι υπάρχουν (απείρως) πολλά πιθανά μεγέθη για άπειρα σύνολα και οδηγήθηκε στη θεώρηση των υπέρ-πεπερασμένων αριθμών (transfinite numbers)

Ο Cantor διατύπωσε πρώτος αυτό που αργότερα έγινε γνωστό ως υπόθεση του συνεχούς δηλαδή δεν υπάρχει κανένα σύνολο των οποίων η ισχύς είναι μεγαλύτερη από εκείνη των φυσικών και μικρότερη από εκείνη των πραγματικών. Ο Cantor πίστευε ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι αλήθεια και προσπάθησε για πολλά χρόνια να το αποδείξει με μαθηματική απόδειξη, αλλά δεν τα κατάφερε[9].

Ο Cantor, παρά τους γενικούς και εξαιρετικά ασαφείς ορισμούς πάνω στους οποίους είχε στηρίξει την ανάπτυξη της αφελούς συνολοθεωρίας κατάφερε να περιγράψει όλα τα μαθηματικά αντικείμενα, οικοδομώντας παράλληλα μια εξαιρετικά απλή και κομψή θεωρία. Έτσι τα μαθηματικά στις αρχές του 20ου αιώνα χαρακτηρίζονταν από ένα πνεύμα ευφορίας. Την εποχή εκείνη, διακατείχε τη μαθηματική κοινότητα ένας διάχυτος ενθουσιασμός, καθώς και η ελπίδα ότι όλα τα μαθηματικά μπορούν να τυποποιηθούν πλήρως από την αφελή συνολοθεωρία[10] του Cantor. Ο Hilbert όντας Μαθηματικός και Φυσικός είδε πόσο σημαντικές ήταν οι θεωρίες των συνόλων και του απείρου, καθώς οι προεκτάσεις τους στους πραγματικούς αριθμούς και τον απειροστικό λογισμό αποτελούν βασικά εργαλεία της

---

[8] Το έργο του θεωρήθηκε ως μια πρόκληση για τη μοναδικότητα του απόλυτου απείρου στη φύση του Θεού. Ειδικότερα, είδαν την ύπαρξη ενός πραγματικού απείρου που αποτελούνταν από κάτι άλλο εκτός του Θεού ο οποίος τέθηκε σε κίνδυνο «η αποκλειστική αξίωση του Θεού στην υπέρτατη αιωνιότητα.» Ο Cantor πίστευε ότι η άποψη αυτή ήταν απλά μια παρερμηνεία του απείρου, και ήταν πεπεισμένος ότι η θεωρία συνόλων θα μπορούσε να βοηθήσει ώστε να διορθωθεί αυτό το λάθος.

[9] Η δυσκολία που είχε ο Cantor στο να αποδείξει την υπόθεση του συνεχούς υπογραμμίστηκε από νεότερες εξελίξεις στον τομέα των μαθηματικών: Ένα αποτέλεσμα του 1939 από τον Gödel και μία εργασία του 1963 από τον Paul Cohen μαζί συνεπάγονται ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί να αποδειχθεί, ούτε να διαψευσθεί με βάση το τυπικό της θεωρίας ZF μαζί με το αξίωμα επιλογής (ο συνδυασμός καλείται "ZFC").

[10] Η αφελής θεωρία θεωρείται ως μία άτυπη θεωρία, που χρησιμοποιεί φυσική γλώσσα για να περιγράψει σύνολα και πράξεις στα σύνολα. Οι λέξεις «και, ή, αν ... τότε, οχι, υπάρχει κάποιο, για κάθε» δεν υπάγονται εδώ σε αυστηρό ορισμό Ως διευκόλυνση, η χρήση της αφελούς συνολοθεωρίας και ο φορμαλισμός της επικρατούν ακόμη και στα ανώτερα μαθηματικά – συμπεριλαμβανομένων και πιο τυπικών κατασκευών από την ίδια τη θεωρία συνόλων. Τα σύνολα ορίζονται άτυπα και ερευνώνται μερικές από τις ιδιότητές τους.

Φυσικής. Έγινε υπερασπιστής των τολμηρών θέσεων περί απειρίας απείρου με χαρακτηριστική τη δήλωσή του: *«κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας»*,(Hilbert 1900).

1.3 Τα παράδοξα του απείρου και η κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών.

Η θεωρία που δημιούργησε ο Cantor είχε ανάγκη από υπερασπιστές. Από την πρώτη στιγμή τέθηκε υπό αμφισβήτηση από τους σκεπτικιστές, επειδή έφερε το «μίασμα» του πλατωνισμού και υπαινίσσονταν ότι υπάρχουν άπειροι ορίζοντες που ξεπερνούν τη σφαίρα του φυσικού κόσμου. Τη δυσπιστία για το άπειρο ενέτειναν τα παράδοξα και έφεραν την μια ακόμα κρίση στην ιστορία των μαθηματικών, που εμφανίστηκε το 1897[11].Πολλοί επιστήμονες ανακάλυψαν παράδοξα πάνω στη θεωρία του Cantor εστιασμένα κυρίως στον τρόπο ορισμού των συνόλων που επέτρεπαν σε ένα σύνολο να περιέχει τον εαυτό του.

Ο Frege προχώρησε στην προσπάθεια θεμελίωσης των μαθηματικών, ένα βήμα παραπέρα εγκαινιάζοντας το κίνημα του Λογικισμού. Στόχος του προγράμματος του Λογικισμού ήταν να οριστούν όλες οι έννοιες των μαθηματικών μέσα από τις έννοιες της λογικής και να παραχθούν όλα τα θεωρήματα με βάση λογικά αξιώματα. Το έργο του Frege «*Grundgesetze der Arithmetik*» ήταν μια προσπάθεια υλοποίησης του προγράμματος αυτού στο πεδίο της θεωρίας αριθμών με όρους άπειρων συλλογών και η αναγωγή της συνέπειάς της, στη συνέπεια της τυπικής λογικής. Ωστόσο το έργο του Frege σταμάτησε[12] το παράδοξο του Russel για το σύνολο των συνόλων που περιέχουν ή όχι τον εαυτό τους. Μια απλούστερη εκδοχή έδωσε ο Russel το 1919 και αφορά τον μπαρμπέρη ενός χωριού που ξυρίζει όσους δε ξυρίζονται μόνοι τους. Η απάντηση στην ερώτηση «εάν ο μπαρμπέρης ξυρίζεται μόνος του» οδηγεί σε παράδοξο.

---

[11] Ο ίδιος ο Cantor το 1897 ανακάλυψε το ομώνυμο παράδοξό του: ποιος είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των συνόλων; Αν υπήρχε θα έπρεπε να είναι υπερπερασμένος αριθμός μεγαλύτερος από κάθε άλλο υπερπερασμένο αριθμό. Αλλά ο ίδιος απέδειξε ότι για κάθε υπερπερασμένο αριθμό υπάρχει ένας μεγαλύτερός του. Άρα η θεωρία των συνόλων δεν μπορεί να θεμελιωθεί, ή έστω να μας πει πόσα σύνολα υπάρχουν

[12] Με γράμμα που απέστειλε ο Russel στον Frege του κοινοποίησε το παράδοξο. Ο Frege παραδέχτηκε το παράδοξο αυτό και με δραματικό τόνο ανέφερε στο τέλος του Βιβλίου που ήταν υπό έκδοση ότι ματαιώνεται η προσπάθεια θεμελίωσης της αριθμητικής του και πιθανού οποιουδήποτε αξιωματικού συστήματος αριθμητικής επιχειρηθεί.

Ο Russell θεώρησε ότι τα παράδοξα οφείλονταν στη χρήση της αυτοαναφοράς και εισηγήθηκε τον εξοστρακισμό της από τη μαθηματική πρακτική. Η θεωρία των τύπων που ανέπτυξε ήταν απαλλαγμένη από την έννοια αυτή. Η διαγώνια μέθοδος του Cantor και τα θεωρήματα μη-πληρότητας του Gödel κάνουν χρήση της αυτοαναφοράς για να καταλήξουν σε αποτελέσματα μείζονος σημασίας για τα σύγχρονα μαθηματικά. Ο Zermelo, απ' την άλλη, θεώρησε ότι τα λογικά παράδοξα είχαν ως βάση τη γενική αρχή συμπερίληψης, σύμφωνα με την οποία για κάθε ιδιότητα που μπορούμε να διατυπώσουμε στα πλαίσια μιας γλώσσας, μπορούμε να δημιουργήσουμε το σύνολο των στοιχείων που ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή. Η αρχή αυτή διατυπώνεται με σαφήνεια στο έργο του Frege και χαρακτηρίζει το οικοδόμημά του. Ο Cantor, αντίστοιχα, ορίζει το σύνολο ως *«οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας»*. Αν και δεν την διατυπώνει με σαφήνεια, ο Cantor επικαλείται ουσιαστικά και αυτός τη γενική αρχή συμπερίληψης. Για να εξαλειφθούν τα παράδοξα, εγκαταλείφθηκε ο ορισμός του Cantor και υιοθετήθηκε το αξιωματικό σύστημα Zermelo-Fraenkel, το οποίο έθετε σαφείς περιορισμούς στη δημιουργία των συνόλων. Με βάση το σύστημα αυτό, αποδεκτά ήταν μόνο τα σύνολα που μπορούσαν να δημιουργηθούν από τη συνδυαστική χρήση των αξιωμάτων. Αν και κάτι τέτοιο φαινόταν να περιορίζει δραματικά τη μαθηματική πρακτική, η ανάπτυξη που γνώρισε η θεωρία συνόλων τα επόμενα χρόνια υπήρξε θεαματική. Ωστόσο επειδή η θεωρία συνόλων του Cantor επέφερε αντινομίες, ο Hilbert επισήμανε:

> …η παρούσα κατάσταση…είναι ανυπόφορη. Απλώς σκεφτείτε ότι οι ορισμοί και οι παραγωγικές μέθοδοι που ο καθένας μαθαίνει, διδάσκει και χρησιμοποιεί στα μαθηματικά, το πρότυπο της αλήθειας και της βεβαιότητας, οδηγούν σε ατοπίες! Αν η μαθηματική σκέψη είναι ελαττωματική, που θα βρούμε αλήθεια και βεβαιότητα;

Συνεχίζοντας όμως έδειξε το δρόμο

> ...ως Μαθηματικοί έχουμε βρεθεί συχνά σε επικίνδυνες καταστάσεις, από τις οποίες έχουμε σωθεί με την ευφυή μέθοδο των ιδεωδών στοιχείων… Ομοίως (τώρα) για να διαφυλάξουμε τους απλούς τυπικούς κανόνες της Αριστοτέλειας λογικής, πρέπει να αντικαταστήσουμε τις πεπερασμένες δηλώσεις με ιδεώδεις δηλώσεις.

Η λογική και η θεωρία των συνόλων αποτελούν προϊόντα της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών.

1.4 Τα τρία μεγάλα φιλοσοφικά ρεύματα του 19ου και 20ου αιώνα

Οι Μαθηματικοί ως φορείς του μαθηματικού πολιτισμού, **με τις δημιουργικές τους αμφισβητήσεις δημιουργούν γόνιμο περιβάλλον γέννησης νέων εννοιών και θεωριών.** Οι νέες έννοιες συνήθως στηρίζονται σε έννοιες που είναι καταρχήν κατανοητές μόνο διαισθητικά (για παράδειγμα συνολοθεωρίες που ενσωματώνουν την αριθμητική μέσα σε αυτές). Όπως ανέφερε [28] ο R.Wilder: *«Οι κρίσεις λόγω της εμφάνισης ασυνεπειών οδηγεί σε μια κατασκευαστική αμφισβήτηση και προκαλεί τελικά την γρήγορη εξέλιξη νέων εννοιών».*

Τον 19ο αιώνα, ταυτόχρονα με την κρίση των θεμελίων των μαθηματικών, αναδύθηκαν και τα τρία φιλοσοφικά ρεύματα που έμελλε να κυριαρχήσουν στη φιλοσοφία των μαθηματικών τον 20ο αιώνα. **Ο Λογικισμός, ο Φορμαλισμός και ο Ιντουισιονισμός** προσπάθησαν να ορίσουν τα θεμέλια των μαθηματικών και να επαναπροσδιορίσουν το είδος της μαθηματικής δημιουργίας. Ειδικότερα οι δύο πρώτες υιοθέτησαν στις μεθόδους τους την λογική και τη θεωρία των συνόλων, χρησιμοποίησαν τον συμβολισμό και τα προσεκτικά σύνολα αξιωμάτων, πάνω στα οποία προσπάθησαν να οικοδομήσουν τα μαθηματικά.

Στα τέλη του 18ου αιώνα μπήκε το ερώτημα ποια είναι η σχέση Λογικής και Μαθηματικών και ειδικότερα Λογικής και Αριθμητικής. Βασική πεποίθηση πολλών μαθηματικών ήταν ότι οι νόμοι της Λογικής είναι έμφυτοι στην σκέψη και ότι όλες οι έννοιες (όπως ο «φυσικός αριθμός») καθορίζονται μονοσήμαντα από τις λογικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. **Ιδρυτής του Λογικισμού** θεωρείται ο Frege ο οποίος το 1879 διατύπωσε το στόχο να αναχθούν όλα τα Μαθηματικά στη Λογική, υποστηρίζοντας ότι οι λογικές και μαθηματικές αλήθειες είναι πέραν κάθε αμφιβολίας δυνατότητες της φύσης και της σκέψης. Οι λογικιστές προσπάθησαν να στηρίξουν την μαθηματική γνώση στην απόδειξη. Πίστευαν ότι και οι πιο στοιχειώδεις μαθηματικές προτάσεις, μπορούν να προέλθουν από βασικότερες λογικές αρχές οι οποίες παίζουν το ρόλο των αξιωμάτων, χωρίς να είναι γνωστές από τη διαίσθηση. Συνεχιστές του Frege, υπήρξαν ο Russell και ο Whitehead, που με το τρίτομο έργο τους «*Principia Mathematica*» επεδίωξαν γύρω στο 1910 να αναγάγουν την Αριθμητική στην Λογική. Όρισαν τη θεωρία των τύπων, μια τυπική θεωρία συνόλων, η οποία ήταν σε θέση να περιγράψει όλα τα κλασσικά μαθηματικά αντικείμενα. Στόχος της προσπάθειάς τους ήταν η αναγωγή της θεωρίας τύπων σε ένα πλήρες και συνεπές λογικό σύστημα χωρίς εξωτερικές αναφορές. Οι άλλες δύο φιλοσοφικές τάσεις των μαθηματικών (φορμαλιστές, «ενορατιστές») απέρριψαν την προσπάθειά τους κατακρίνοντας ότι προσπάθησαν να υποκαταστήσουν τα αριθμητικά αξιώματα με λιγότερο προφανή αξιώματα.

Το κίνημα του Φορμαλισμού, αν και δεν πρόκειται για ένα ενιαίο κίνημα, αντιμετωπίζει τα μαθηματικά ως ένα σύνολο κανόνων που, αν συνδυαστούν σωστά, παράγουν έγκυρα αποτελέσματα. Επεδίωξαν την απαλλαγή των μαθηματικών από την καθομιλούμενη γλώσσα και τον πλήρη συμβολισμό τους. Η έννοια της αλήθειας και η έννοια της αποδειξιμότητας ταυτίζονται, δεδομένου ότι για τους φορμαλιστές τα μαθηματικά αντικείμενα στερούνται νοήματος και αντιμετωπίζονται απλά ως σύμβολα που συνδέονται μεταξύ τους με συγκεκριμένες σχέσεις. Για τους φορμαλιστές, ουσιαστικά, η απόδειξη μιας πρότασης αποτελεί ένα μηχανιστικό τρόπο ελέγχου της αλήθειας της. Ο Hilbert, ο οποίος το 1899 είχε δομήσει ένα αξιωματικό σύστημα για τη γεωμετρία που ανήγαγε τη συνέπειά της, στη συνέπεια της θεωρίας αριθμών, ήταν ο κυριότερος εκπρόσωπος του Φορμαλισμού. Αν και απέρριπτε την ύπαρξη του απείρου, πρέσβευε ότι η μαθηματική πρακτική οφείλει να συνεχίσει με το συνηθισμένο τρόπο, περικόπτοντας μόνο ότι οδηγεί σε παράδοξα ή αντιφάσεις. Η αμφισβήτησή του για τη φύση του απείρου εδραζόταν τόσο στην αμφιβολία του ότι το άπειρο εμφανίζεται στη φύση, όσο και στο γεγονός ότι θεωρούσε ότι είναι μια έννοια που δεν μπορεί να διαχειριστεί η ανθρώπινη νόηση. Ήταν βαθύτατα πεπεισμένος ότι οι πραγματικοί όροι μπορούν να εξαλειφθούν από μία πρόταση. Παράλληλα, πρέσβευε ότι κάθε καλά διατυπωμένο μαθηματικό πρόβλημα έχει λύση. Για αυτούς τους λόγους, βασικός στόχος του προγράμματος του Hilbert ήταν η εύρεση ενός συνεπούς αξιωματικού συστήματος για τα μαθηματικά, το οποίο θα έχει τη δυνατότητα να αποδεικνύει με **περατοκρατικό**[13] τρόπο κάθε μαθηματική αλήθεια. Το «*Entscheidungsproblem*» που εισηγήθηκε το 1928, αφορούσε τη δημιουργία ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου που παίρνοντας ως όρισμα μια έκφραση της τυπικής γλώσσας θα αποφαινόταν αν είναι αληθής ή ψευδής.

Μία άλλη ομάδα μαθηματικών που πίστευε ότι οι βασικές μαθηματικές έννοιες πηγάζουν απ’ ευθείας από την διαίσθηση ή ενόραση, δηλαδή από άμεση μη εμπειρική επίγνωση, προσεγγίζοντας τις αρχές του Kant, αποτέλεσε τους

---

[13] Palle Yourgrau (2005: 85) Το σύστημα να είναι όχι ακριβώς πεπερασμένο αλλά «περατό» (finitary) Δηλαδή οι αποδείξεις του πρέπει να προσφέρονται για εμπειρικό έλεγχο και σε καμία περίπτωση να μην επικαλούνται ένα αφηρημένο, θεωρητικό και ολοκληρωμένο άπειρο όπως αυτό που περιέγραψε ο Cantor

«Ενορατιστές» ή «Διαισθητιστές» (Intuitionists) με κύριο εκφραστή τον Ολλανδό Luitzen Brouwer. Θεωρούσαν ότι τα μαθηματικά είναι μία διαδικασία σύνθεσης νέων αληθειών στηριζόμενη μόνο σε κάποια θεμελιώδη μαθηματική διαίσθηση. Η προσπάθειά τους ήταν να επιτύχουν αυστηρές αποδείξεις αποφεύγοντας έννοιες και διαδικασίες που δεν ανταποκρίνονται άμεσα στην διαισθητική αντίληψη.

Σύμφωνα με τους ιντουισιονιστές, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι υποκειμενικές νοητικές κατασκευές που δεν υπάρχουν πέρα από την εποπτεία ή την ενόραση του μαθηματικού. Η ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι συνυφασμένη με την κατασκευή του, η οποία πρέπει να μπορεί να λάβει χώρα σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Ο Brouwer δεχόταν την έννοια του εν δυνάμει απείρου και την αρχή της πλήρους επαγωγής ως ενορατικά αποδεκτές διαδικασίες, αλλά απέρριπτε την έννοια του συνεχούς, όπως εκφράζεται στα κλασσικά μαθηματικά. Θεωρούσε ότι η αρχή της καλής διάταξης δεν ισχύει σε υπεραριθμήσιμα σύνολα, καθώς δύο στοιχεία τους δεν είναι συγκρίσιμα, δεδομένου ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε έναν αλγόριθμο που να τα συγκρίνει και να τερματίζει στην περίπτωση που τα στοιχεία αυτά είναι ίσα. Παράλληλα, απέρριπτε την αρχή του αποκλεισμού του τρίτου και κατ' επέκταση την εις άτοπο απαγωγή ως έγκυρη αποδεικτική μέθοδο. Η ιντουσιονιστική λογική που αναπτύχθηκε και τα μαθηματικά τα οποία δημιουργούνται με βάση τις παραδοχές αυτές, όπως για παράδειγμα η αριθμητική Heyting, διαφέρουν σε αρκετά σημεία από την κλασσική μαθηματική πρακτική, περιορίζοντας σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματά της.

1.5 Η εμφάνιση της μη πληρότητας του Gödel

Ο Frege με το έργο του *«Begriffsschrift»* κατάφερε δυο σημαντικά πράγματα α) Να αξιωματικοποιήσει τη λογική (κάτι που έκανε ο Ευκλείδης πριν από περίπου 2000 χρόνια για τη Γεωμετρία) και β) να την τυποποιήσει, δηλαδή να τη διατυπώσει χρησιμοποιώντας μια τεχνικά δομημένη συμβολική γλώσσα προετοιμάζοντας το έδαφος για τις γλώσσες προγραμματισμού. Εφάρμοσε την νέα μαθηματικοποιημένη λογική ως ξεχωριστό κλάδο των μαθηματικών με συγκεκριμένο περιεχόμενο ως θεμέλιο των μαθηματικών ειδικά στην αριθμητική ή τη θεωρία αριθμών. Ο Hilbert ανέπτυξε με τη σειρά του μια νέα μαθηματική θεωρία με τη μελέτη λογικών συστημάτων νέου συμβολισμού που ονομάστηκε **μεταμαθηματικά** επειδή αφορούσε την μαθηματική μελέτη των ίδιων των μαθηματικών συστημάτων.

Σκοπός του προγράμματός του ήταν να αντικαταστήσει σε όλα τα μαθηματικά πεδία την διαίσθηση με ένα σύστημα αξιωμάτων που θα γράφονταν με τη μορφή τύπων. Κατόπιν ακολουθώντας προκαθορισμένους συντακτικούς και αποδεικτικούς κανόνες, θα συνάγονταν όλα τα θεωρήματα όλων των μαθηματικών πεδίων. Μελετώντας αυτό το νέο πεδίο των μεταμαθηματικών, ο Hilbert έθεσε δύο κρίσιμα σημεία: α) κατά πόσο ένα δεδομένο λογικό ή μαθηματικό σύστημα (όπως του Frege) είναι εσωτερικά συνεπές, δηλαδή δεν δημιουργεί αντιφάσεις και β) να είναι πλήρες, δηλαδή να μπορεί να δείξει κάθε δυνατή αλήθεια που παράγεται από προτάσεις που διατυπώνονται στα πλαίσια του συστήματος. Συνέπεια αυτής της προσπάθειας ήταν να επικρατήσει ένας ακραίος φορμαλισμός[14] στην προσπάθεια της μαθηματικής απόδειξης. Υπήρχε η πίστη ότι ο φορμαλισμός θα έφερνε μια βεβαιότητα στα μαθηματικά, όμοια με αυτή που οι νόμοι του Νεύτωνα εισήγαγαν στη μηχανική δύο αιώνες νωρίτερα. Αλλά όπως αναφέρει [4], ο Δρόσος:

> Όπως με την Κβαντομηχανική είχαμε την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, έτσι και στα μαθηματικά τα περίφημα θεωρήματα του Gödel το 1931, αλλά και τα θεωρήματα των Löwenheim-Skolem διέλυσαν για πάντα την ελπίδα για απόλυτο ντετερμινισμό [15]και βεβαιότητα στα μαθηματικά. Ο Gödel απέδειξε ένα θεώρημα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα από τα σπουδαιότερα επιτεύγματα στην ιστορία της μαθηματικής σκέψης: «κανένα αξιωματικό σύστημα με αρκετά αξιώματα (να περιέχει για παράδειγμα τα αξιώματα της αριθμητικής) δεν είναι δυνατό να αποδείξει την αλήθεια ή το ψεύδος κάθε πρότασης που θα μπορούσε να διατυπωθεί σε αυτό». Στην πραγματικότητα αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα είδος σύμφυτης αβεβαιότητας και ότι τα μαθηματικά δεν μπορούν να περιοριστούν στη μελέτη μόνο των ακριβολογιστικών τους χαρακτηριστικών. Τα αποτελέσματα του Gödel έδωσαν αφορμή για μια αυστηρή ανάλυση της τυπικής διαδικασίας στα μαθηματικά που αποτέλεσε αυτό που ονομάζουμε μεταμαθηματική, ή θεωρία απόδειξης, που είναι μια θεωρία για αυτά τα ίδια τα μαθηματικά.

1.6 Gödel η ζωή και το έργο του

[14] Ο φορμαλισμός του Hilbert έχει να κάνει με την επικράτηση της μορφής επί του περιεχομένου, της σύνταξης επί της σημασιολογίας , της απόδειξης επί της αλήθειας.

[15] Σύμφωνα με τις αρχές του ντετερμινισμού τα πάντα στον κόσμο γίνονται με μια αιτιώδη συνάφεια – αιτιοκρατία. Κάθε γεγονός το οποίο εμπεριέχει ανθρώπινη δράση συνδέεται με αιτιώδη αλυσιδωτή σχέση με τις προγενέστερες καταστάσεις. Δεν υπάρχουν ανεξήγητα η τυχαία γεγονότα. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι Λεύκιππος και Δημόκριτος ήταν οι πρώτοι που θεωρητικά συνέλαβαν την ιδεολογία του ντετερμινισμού, πρεσβεύοντας ότι στηρίζονταν στις μηχανικές αλληλεπιδράσεις των ατόμων. Η ιδέα ότι το σύμπαν αποτελεί ένα ντετερμινιστικό σύστημα έχει επιδράσει με καθοριστικό τρόπο στις Δυτικές και μη, φιλοσοφικές και θρησκευτικές αντιλήψεις.

Ο Gödel έζησε στη Γερμανία, στην Αυστρία, στη Τσεχία και στην Αμερική. Η γλώσσα ομιλίας του Gödel ήταν γερμανική, όπως ήταν και το πολιτιστικό υπόβαθρο του, αλλά ο ίδιος γεννήθηκε το 1906 στην πόλη της Μοραβίας Brunn (Τσέχικο όνομα Μπρνο) στην Κεντρική Ευρώπη, που την εποχή εκείνη ήταν μεγάλο βιομηχανικό κέντρο κλωστοϋφαντουργίας. Όταν γεννήθηκε ο Gödel, η Μοραβία ήταν μέρος της Αυστρο-Ουγγρικής αυτοκρατορίας. Μετά τον Α΄ Παγκόσμιο Πόλεμο η Αυστρο-Ουγγρική Αυτοκρατορία διαλύθηκε, και ο Gödel μεγάλωσε ως μέλος του μεγάλου γερμανόφωνου πληθυσμού του Μπρνο και σα ένας πολίτης του νεοσύστατου κράτους της Τσεχοσλοβακίας. Το 1929, όταν εργαζόταν για τη διδακτορική του διατριβή στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης, έγινε Αυστριακός πολίτης. Όταν αργότερα το 1938 η Αυστρία προσαρτήθηκε από τη ναζιστική Γερμανία, αν και Γερμανός υπήκοος, ήταν υπό παρακολούθηση των αρχών της χώρας αυτής. Ο Gödel ήταν εντελώς αδιάφορος για την πολιτική, αλλά ως ακαδημαϊκός και πνευματικός άνθρωπος συναναστρεφόταν με Εβραϊκούς και φιλελεύθερους κύκλους, και για αυτό το λόγο αντιμετωπίστηκε με καχυποψία. Έτσι αντιμετώπισε δυσκολίες για το διορισμό του ως λέκτορας. Μια φορά δέχθηκε επίθεση στο δρόμο από μια συμμορία νέων των Ναζί οι οποίοι εκδιώχθηκαν από τη σύζυγό του. Με αυτή την δυσάρεστη κατάσταση, και τον κίνδυνο της επιστράτευσης του στον γερμανικό στρατό, ο Gödel παρακινήθηκε να μεταναστεύσει στις Ηνωμένες Πολιτείες, και τελικά το 1940, εντάχθηκε στο Ινστιτούτο Ανωτέρων Μελετών (Institute for Advanced Study - IAS) στο Πρίνστον. Το 1948 έγινε Αμερικανός πολίτης.

Αν και ο Gödel είναι διάσημος κυρίως για τα **θεωρήματα μη πληρότητας (ΘΜΠ**), απέδειξε πολλά άλλα θεμελιώδη αποτελέσματα στην λογική, κυρίως, όταν ήταν στη Βιέννη μεταξύ 1929 και 1940, διάστημα κατά το οποίο έκανε επίσης επισκέψεις στο IAS αλλά και στο Πανεπιστήμιο της Notre Dame στις Ηνωμένες Πολιτείες. Απέδειξε, στη διδακτορική του διατριβή (σε ηλικία 23 ετών), **το θεώρημα πληρότητας για τη λογική πρώτης τάξης**, και προχώρησε να αποδείξει τα ΘΜΠ για τα οποία έγινε διάσημος και ήταν αυτός ο λόγος που του προσφέρθηκε η θέση στο IAS, όπου και παρέμεινε ως καθηγητής μέχρι τον θάνατό του το 1978, αναπτύσσοντας στενή φιλία με τον Einstein. Απέδειξε επίσης κάποια ιδιαίτερα σημαντικά αποτελέσματα στη θεωρία των συνόλων. Αυτές ήταν επιγραμματικά όλες οι δημιουργικές εργασίες που οδήγησαν σε μια σειρά από εξελίξεις στη μαθηματική λογική και τα θεμέλια των μαθηματικών. Ως μέλος του IAS, όπου παρέμεινε μέχρι τη συνταξιοδότησή του το 1976, ανέπτυξε αυτό που είναι γνωστό ως ερμηνεία «*Gödel Dialectica*» (δημοσιεύσεις από το έτος 1958 στο περιοδικό Dialectica), και έχει να κάνει με την ερμηνεία των ιντουισιονιστικών μαθηματικών.

Έκανε επίσης πρωτότυπο έργο στη γενική θεωρία σχετικότητας του Einstein, αποδεικνύοντας την ύπαρξη λύσεων των εξισώσεων μιας θεωρίας που περιγράφει ένα σύμπαν στο οποίο είναι θεωρητικά δυνατό να ταξιδεύει κάποιος στο παρελθόν. Μετά το 1940 οι δημοσιεύσεις του ήταν λίγες, αλλά κατά τα τελευταία χρόνια της ζωής του έλαβε πολλές ακαδημαϊκές διακρίσεις.

Προδόθηκε απ' τη λογική του προς το τέλος της ζωής του και ζούσε με τον συνεχή φόβο πως θα τον δηλητηριάσουν, πίστευε ότι απ' το ψυγείο εκλύονται επικίνδυνα αέρια κι έβαζε την σύζυγό του (Adele), να δοκιμάζει το φαγητό του πριν το φάει. Όταν νοσηλεύτηκε για τη θεραπεία των επιπλοκών μιας κοινής πάθησης στα 72 του χρόνια, στα τέλη του Νοέμβρη του 1977, δεν έτρωγε απολύτως τίποτα και κατέληξε να πεθάνει δεκαεπτά μέρες μετά («από υποσιτισμό και απίσχνανση», σύμφωνα με το ιατρικό πιστοποιητικό), έχοντας φτάσει να ζυγίζει μόνο 33 κιλά.

Κεφάλαιο 2. Τυπικές αξιωματικές θεωρίες

2.1. Στοιχεία από τον προτασιακό και κατηγορηματικό λογισμό

Η λογική αποτελείται από δύο μέρη:

1. Λογική των Προτάσεων (ή Προτασιακή Λογική).
2. Λογική των Κατηγορημάτων (ή Κατηγορηματική Λογική ή Α΄θμια λογική).

2.1.1 Ο προτασιακός λογισμός

Μια λέξη εκφράζει γλωσσικά (συμβολίζει) μια έννοια. Η πρόταση είναι μια γλωσσική ενότητα, η οποία εκφράζει κάποιο νόημα. Είναι το γλωσσικό όχημα με το οποίο εκφράζεται μια ιδέα ή μια σκέψη σε σχέση με κάποιες έννοιες. Οι προτάσεις με τις οποίες θέλουμε να δώσουμε μια πληροφορία ή να διατυπώσουμε μια γνώμη λέγονται αποφαντικές. Χαρακτηρίζουμε αληθή κάθε αποφαντική πρόταση, η οποία περιγράφει μια πραγματική κατάσταση του κόσμου μας. Χαρακτηρίζουμε ψευδή κάθε αποφαντική πρόταση, η οποία περιγράφει μια μη υπαρκτή κατάσταση των πραγμάτων. Αν μια αποφαντική πρόταση είναι αληθής λέμε ότι έχει τιμή αληθείας (ή αληθοτιμή) αληθή . Αν είναι ψευδής λέμε ότι έχει τιμή αληθείας ψευδή. Όταν αναφερόμαστε σε πρόταση εννοούμε μια αποφαντική πρόταση, η οποία είναι ή αληθής ή ψευδής. Έτσι, η λογική την οποία ακολουθούμε και περιγράφουμε από εδώ και στο εξής είναι μια λογική η οποία περιέχει μόνον δυο τιμές αληθείας, αυτές της αλήθειας και του ψεύδους. Μια τέτοια λογική λέγεται δίτιμη ή Αριστοτέλεια λογική.

Όταν οι προτάσεις, έχουν πιο πλούσιο περιεχόμενο τότε γίνονται πιο σύνθετες και υπάρχει ανάγκη να χρησιμοποιούμε συνδέσμους όπως «και», «ούτε», «όχι» κλπ. με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούμε πολλά λόγια, να δημιουργούνται ασάφειες και να προκαλείται κόπωση. Για να αποφύγουμε αυτά τα προβλήματα, χρησιμοποιούμε ορισμένα γράμματα της αλφαβήτου, όπως τα Π,Ρ,Σ, κλπ. και συμφωνούμε ότι αυτά τα γράμματα θα αναπαριστούν τις προτάσεις αυτές. Δηλαδή, κάθε φορά που θέλουμε να αναφερθούμε σε μια πρόταση, δεν θα την παραθέτουμε ολόκληρη, αλλά θα χρησιμοποιούμε ένα από τα γράμματα Π,Ρ,Σ, κλπ, ως όνομά της. Για παράδειγμα αντί να χρησιμοποιούμε την έκφραση: η πρόταση «ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του» χρησιμοποιούμε την έκφραση: η πρόταση Π.

Τα γράμματα που χρησιμοποιούμε ως σύμβολα προτάσεων τα καλούμε **προτασιακές μεταβλητές**. Λειτουργούν με τρόπο ανάλογο προς τις μεταβλητές που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά, όπου στη θέση τους μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιουσδήποτε αριθμούς. Αν είναι Τ και Σ δύο προτασιακές μεταβλητές, τότε κατασκευάζουμε τη συμβολική έκφραση Τ↓ Σ και έστω συμφωνούμε για αυτήν ότι το σύμβολο ↓ είναι ένας σύνδεσμος και σημαίνει τη σύζευξη των Τ, Σ. Έτσι τώρα στις θέσεις των Τ, Σ μπορούμε να βάλουμε όποια πρόταση θέλουμε και να παράγουμε μεγάλο πλήθος προτάσεων. Η αληθοτιμή κάθε τέτοιας πρότασης καθορίζεται από τις αληθοτιμές των προτάσεων που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές Τ, Σ.
Γίνεται φανερό πως παράλληλα με την καθομιλουμένη γλώσσα μπορούμε να εισαγάγουμε κάποια στοιχεία μιας γλώσσας τεχνητής-συμβολικής, την οποία στη συνέχεια εμπλουτίζουμε και με άλλα σύμβολα.

Τη γλώσσα αυτή τη χαρακτηρίζουμε τεχνητή για να την αντιδιαστείλουμε προς τη γλώσσα που ομιλούμε, η οποία κατά κάποιο τρόπο αποτελεί το φυσικό τρόπο επικοινωνίας (φυσική γλώσσα). Η συμβολική και η φυσική γλώσσα συσχετίζονται καθώς από τη μια μπορούμε να μεταβαίνουμε στην άλλη, αντιστοιχίζοντας ή μεταφράζοντας τις εκφράσεις της μιας σε εκφράσεις της άλλης.

Αν τα σύμβολα ↓, ↑, παριστάνουν συνδέσμους τότε η έκφραση Π↓(Ρ↑Σ) είναι ένας **προτασιακός τύπος** που αποτελείται από τις **ατομικές προτάσεις** Π, Ρ, Σ και εκφράζει μια νέα πρόταση. Κάθε προτασιακή μεταβλητή μπορεί να αντικατασταθεί με ένα προτασιακό τύπο οπότε μπορούμε να δημιουργήσουμε ατέλειωτο πλήθος καλά διατυπωμένων προτασιακών τύπων. Ένας μη καλά διατυπωμένος τύπος είναι για παράδειγμα ο ↓(Ρ↑Σ), αφού ο σύνδεσμος ↓ (θεωρήσαμε ότι είναι η σύζευξη δύο προτάσεων) πρέπει να είναι διμελής.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η Προτασιακή Λογική αποτελείται από:

Α) το αλφάβητο που αποτελείται από:

1) τα κεφαλαία γράμματα Α,…,Ω με τα οποία φτιάχνουμε τις ατομικές προτάσεις

2) τα σύμβολα των παρενθέσεων (,)

3) τους συνδέσμους

Β) το συντακτικό που ορίζει ότι:

1) κάθε ατομική πρόταση είναι πρόταση,

2) αν Α πρόταση τότε και η «**όχι** Α» είναι πρόταση,

3) Αν Α,Β είναι προτάσεις τότε είναι προτάσεις και οι:

i) Α **και** Β

ii) Α **ή** Β

iii) Α **τότε** Β

iv) Α **τότε και μόνο τότε** Β

4) Χρησιμοποιώντας τους κανόνες 1 έως 4 με επαναλήψεις πεπερασμένου πλήθους δημιουργούνται προτάσεις.

Ορισμός 1 Με τον όρο απονομή αλήθειας εννοούμε μια συνάρτηση από το σύνολο όλων των ατομικών προτάσεων στο σύνολο {α, ψ}, δηλαδή στο σύνολο {αληθής, ψευδής}

Στον παρακάτω πίνακα αλήθειας δώσαμε απονομή αλήθειας στις ατομικές προτάσεις Γ,Δ, ορίσαμε απονομή αλήθειας με κατάλληλες πράξεις και στις υπόλοιπες προτάσεις

Γ	Δ	$\neg\Gamma$	$\neg\Delta$	$\Gamma \to \Delta$	$\neg\Delta \to \neg\Gamma$	$(\Gamma \to \Delta) \to (\neg\Delta \to \neg\Gamma)$
a	a	ψ	ψ	a	a	a
a	ψ	ψ	a	ψ	ψ	a
ψ	a	a	ψ	a	a	a
ψ	ψ	a	a	a	a	a

Πίνακας 1 απονομή αλήθειας

Τα σύμβολα **¬, →, ↔**είναι ισοδύναμα με τους συνδέσμους **όχι, αν τότε, τότε και μόνο τότε.** Η κάθε γραμμή του πίνακα λέγεται **εκτίμηση** και στο παραπάνω παράδειγμα όλες οι εκτιμήσεις κάνουν την τελευταία πρόταση αληθή, λέμε τότε την πρόταση αυτή **ταυτολογία.**

2.1.2 Ο κατηγορηματικός λογισμός

Ας θεωρήσουμε την πρόταση Κ: «Ο Όλυμπος έχει ύψος πάνω από 2000 μέτρα», στη θέση του υποκείμενου εκτός της λέξης Όλυμπος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες ατομικότητες, όπως ένα όνομα (Γιώργος), ένα κατασκεύασμα (πύργος) κλπ. Έτσι δημιουργούνται επίσης οι προτάσεις: Λ: «Ο Γιώργος έχει ύψος πάνω από 2000 μέτρα», Μ: « Ο πύργος έχει ύψος πάνω από 2000 μέτρα», που είναι ψευδείς προτάσεις. Σε αυτές τις προτάσεις κατηγορούμε δηλαδή αποδίδουμε μια ιδιότητα (ψηλός) την οποία λέμε και **κατηγόρημα**, σε τρείς διαφορετικές ατομικότητες (Όλυμπος Γιώργος, πύργος)

Η συμβολική γλώσσα που χρησιμοποιούμε στην προτασιακή λογική συγκροτείται με τέτοιον τρόπο, ώστε δεν έχει τη δυνατότητα να εκφράσει τη δομή **υποκείμενο-κατηγόρημα**, καθώς και τη δομή προτάσεων που αναφέρονται σε σχέσεις μεταξύ ατομικοτήτων. Επίσης, η γλώσσα αυτή δεν είναι σε θέση να περιγράψει τη δομή προτάσεων που περιέχουν εκφράσεις όπως "κάθε τι" η "μερικά" και άλλες παρόμοιες. Αυτές οι αδυναμίες θεραπεύονται με την εισαγωγή της κατηγορηματικής λογικής .

Μπορούμε στην πρόταση Κ, να συμβολίσουμε το κατηγόρημα «έχει ύψος πάνω από 2000 μέτρα», με Α και την ατομικότητα με α που χαρακτηρίζεται ως **σταθερή,** αφού αναφέρεται στον Όλυμπο. Έτσι η πρόταση Κ συμβολίζεται με Α(α). Αν τώρα γράψουμε Α(x) θεωρούμε ότι το x μπορεί να πάρει την σταθερή α και κάθε άλλη σταθερή. Το x λέγεται **ατομική μεταβλητή**, και το σύμβολο Α(x) λέγεται **τύπος,** ο οποίος είναι γεννήτορας ατέλειωτων προτάσεων, αληθών και ψευδών. Αν Β είναι ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο που δηλώνει μια σχέση μεταξύ δύο ατομικών μεταβλητών, τότε επίσης θεωρούμε τον Β(x,y) ως τύπο και γενικότερα τον συμβολισμό $Γ(x_1, x_2,\dots x_ν)$ ως τύπο πολλών μεταβλητών.

Ο ίδιος ο Frege θεωρώντας ότι ο ορισμός του φυσικού αριθμού θα αντληθεί από τις προτάσεις της γλώσσας όπου υπεισέρχονται αριθμοί, εντόπισε το ενδιαφέρον του στις απλές προτάσεις της μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. Τη γενικότητα (όλα τα αντικείμενα) ο ίδιος αντιμετώπισε με την εισαγωγή των «ποσοδεικτών» (καθολικού και υπαρκτικού), κάτι που αποτέλεσε θεμελιώδη καινοτομία της Λογικής του. Έτσι, αν κάποια συγκεκριμένη ατομικότητα , υπόκειται (ή όχι) στην έννοια του κατηγορήματος και αν το γλωσσικό σημείο που το εκπροσωπεί τεθεί στη θέση του x, τότε το συναρτησιακό σύμβολο από τη μια γίνεται κορεσμένο (έχουμε πλήρη πρόταση) και από την άλλη η πλήρης πλέον πρόταση είναι αληθής (ψευδής). Οι ποσοδείκτες επιτρέπουν τη διαμόρφωση καθολικών και υπαρκτικών προτάσεων που είναι επίσης πλήρεις, δηλαδή έχουν τιμή αλήθειας (αληθοτιμή). Έτσι μέσω του καθολικού ποσοδείκτη **(∀: «Για κάθε…»)** σχηματίζεται η πρόταση **∀xA(x)** που διαβάζεται ως «όλα τα αντικείμενα με ύψος πάνω από 2000 μέτρα», ενώ μέσω του υπαρκτικού ποσοδείκτη **(□∃: «Υπάρχει…»)** σχηματίζεται η πρόταση **∃xA(x)** που διαβάζεται ως «υπάρχει τουλάχιστον κάτι με ύψος πάνω από 2000 μέτρα».

Χρησιμοποιώντας τον υπαρκτικό (∃) και τον καθολικό ποσοδείκτη (∀) μπορούμε να πάρουμε τύπους μορφής: ∀xA(x) ή ∃xA(x) στους οποίους η ατομική μεταβλητή x είναι **δεσμευμένη** από τον ποσοδείκτη (ή από την εμβέλειά του). Χωρίς την δέσμευση του ποσοδείκτη η μεταβλητή θεωρείται **ελεύθερη**, για παράδειγμα στους τύπους A(y), ∀xA(y,x) η μεταβλητή y είναι ελεύθερη. Η εμφάνιση ενός ποσοδείκτη σε ένα τύπο ελαττώνει κατά ένα τον αριθμό των μεταβλητών με ελεύθερες εμφανίσεις. Για παράδειγμα αν το κατηγόρημα: «μεγαλύτερος από» εκφράζεται από το Α τότε ο τύπος ∃xA(x,y), έχει μόνο τη μεταβλητή y ελεύθερη και θα μπορούσε να συμβολίζει την πρόταση: υπάρχει αριθμός που είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο.

Με βάση τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι οι διάφορες προτάσεις της φυσικής γλώσσας συμβολίζονται με εκφράσεις της συμβολικής γλώσσας, τις οποίες, όπως είπαμε στα προηγούμενα τις καλούμε τύπους. Οι τύποι κατασκευάζονται με τη βοήθεια ατομικών μεταβλητών, ατομικών σταθερών, κατηγορηματικών σταθερών, των συνδέσμων ¬ **(άρνηση), ∨ (διάζευξη), ∧ (σύζευξη), → (συνεπαγωγή), ↔ (ισοδυναμία)**, ποσοδεικτών και παρενθέσεων. Όπως φαίνεται από τους τύπους που έχουμε κατασκευάσει μέχρι τώρα, οι στοιχειώδεις δομικές μονάδες από τις οποίες κατασκευάζονται είναι οι συμβολικές εκφράσεις απλών προτάσεων της μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. Οι εκφράσεις αυτές αποτελούνται από μια κατηγορηματική σταθερά, η οποία ακολουθείται από τόσες ατομικές σταθερές ή μεταβλητές όσες και οι θέσεις του κατηγορήματος που αντιστοιχεί στην κατηγορηματική σταθερά πχ: P(x), Δ(ψ, x), A(β), M(x) κτλ. Τέτοιοι τύποι καλούνται **ατομικοί**, διότι δεν είναι δυνατό να αναλυθούν πιο πέρα. Αποτελούν τα θεμελιώδη δομικά στοιχεία που μπορούν να συμβολίσουν προτάσεις της απλής μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. Χρησιμοποιώντας ατομικούς τύπους φ_1, φ_2, φ_3, ...για να δηλώσουμε τύπους, x_1, x_2, ...x_ν... για να δηλώσουμε ατομικές σταθερές ή ατομικές μεταβλητές, λογικούς συνδέσμους, ποσοδείκτες και παρενθέσεις κατασκευάζουμε τύπους σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

α) Αν Α είναι ένα ν-μελές κατηγορηματικό σύμβολο τότε η έκφραση A(x_1, x_2, ...x_ν) είναι ένας ατομικός τύπος φ

β) Αν φ είναι τύπος τότε και η έκφραση ¬φ είναι τύπος γ) Αν φ_1, φ_2 είναι τύποι τότε και οι συμβολικές εκφράσεις $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ είναι επίσης τύποι.

δ) Αν φ είναι τύπος που περιέχει μια τουλάχιστον μεταβλητή x τότε οι εκφράσεις $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ είναι επίσης τύποι.

ε) Μόνο οι παραπάνω τέσσερις κανόνες παράγουν **καλά διατυπωμένους τύπους (κδτ).**

Τα παραπάνω συγκροτούνται στη βάση ενός αλφάβητου το οποίο περιλαμβάνει:

Α) τα λογικά σύμβολα:

1) λογικές μεταβλητές x_1, x_2, ...x_ν

2) τους λογικούς συνδέσμους ¬ (άρνηση), ∨ (διάζευξη), ∧ (σύζευξη), → (συνεπαγωγή), ↔ (ισοδυναμία)

3) Παρενθέσεις κόμματα, σημεία στίξης

4) τους ποσοδείκτες ∀, ∃

5) Το σύμβολο της ισότητας =

Β) τα ειδικά σύμβολα:

1) κατηγορημάτων Α, Β ,Γ…,Ω
2) συναρτήσεων f, g, h,…
3) σταθερών α_0, α_1, α_2,…

Σε κάθε γλώσσα της Κατηγορηματικής λογικής τα ειδικά σύμβολα ποικίλουν. Για παράδειγμα στην αριθμητική (θεωρία αριθμών) θα υπάρχουν:
το κατηγόρημα ≤ που αφορά τη σύγκριση, τα διμελή σύμβολα των **+**, **.** που αφορούν τις πράξεις πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, το 0, σύμβολο του μηδέν, και ένα σύμβολο για κάθε διάδοχο του μηδέν.

Από όσα προηγήθηκαν συνάγεται ότι κάθε έννοια έχει τη χαρακτηριστική της έκταση, δηλαδή το σύνολο κατά Cantor, των αντικειμένων που καθιστούν αληθείς τις αντίστοιχες προτάσεις, ενώ η έκταση παρέχει το θεμέλιο για τον ορισμό των φυσικών αριθμών. Συγκεκριμένα, ο φυσικός αριθμός αναδύεται ως λογικό χαρακτηριστικό της έννοιας μέσω της ιδέας ότι δύο έννοιες έχουν «ισάριθμη» έκταση, αν οι εκτάσεις τους συνδέονται με 1-1 αντιστοιχία. Έτσι προκύπτει αυστηρά ο ορισμός των φυσικών αριθμών: **ο φυσικός αριθμός που χαρακτηρίζει μια έννοια (την έκτασή της) ορίζεται ως το σύνολο όλων των εκτάσεων που μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία με τη δοσμένη έκταση**. Συνοπτικά μιλώντας, ο φυσικός αριθμός 4, για παράδειγμα, ορίζεται ως το σύνολο όλων των τετράδων, όπου βέβαια ο όρος τετράδα» δεν προϋποθέτει λογικά τον αριθμό 4, αλλά συνιστά απλώς συντομογραφία της έκτασης μιας κατάλληλης έννοιας, για παράδειγμα «Άκρα ενός αρτιμελούς ανθρώπου».

Ο Frege θεώρησε ότι τα παραπάνω, όπως συναρτώνται με την αυστηρή οικοδόμηση της ακολουθίας των φυσικών αριθμών με αφετηρία το μηδέν (που ορίζεται μέσω της έκτασης της έννοιας «μη ταυτόν με τον εαυτό του»), είναι απολύτως δεσμευτικά από λογική άποψη και άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ασφάλεια, όχι μόνο για τον ορισμό των φυσικών αριθμών, αλλά και για την πλήρη αναγωγή της αριθμητικής στη Λογική. Το 1884 δημοσίευσε «*τα Θεμέλια της Αριθμητικής,μια Λογικο-μαθηματική Έρευνα για την Έννοια του Αριθμο,» («Die Grundlagen der Arithmetik, ein logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl»).*

2.2 Η Αριθμητική

Η Αριθμητική είναι η θεωρία των φυσικών αριθμών (ή αλλιώς των μη αρνητικών ακεραίων), δηλαδή το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν στο $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$ και αφορούν τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Υπάρχει και η πράξη, της διαδοχής $s(x)=x+1$, με την οποία παράγονται από το 0 οι υπόλοιποι φυσικοί, για παράδειγμα $1 = s(0)$, $2 = s(1) = ss(0)$, κ.λ.π., (συνήθως στην καθημερινή πρακτική την παραβλέπουμε γιατί τη θεωρούμε μέρος της πρόσθεσης). Όλες οι ιδιότητες που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς, εκφράζονται μέσω των συμβόλων **+,·, s, <, =**, μαζί με κάποια άλλα λογικά σύμβολα . Η λογική μορφή μιας ιδιότητας έχει άμεσο αντίκτυπο στην πολυπλοκότητα του συνόλου που ορίζεται από την ιδιότητα αυτή, δηλαδή στην αναδρομικότητα ή μη του συνόλου. Η γλώσσα (αλφάβητο) της Αριθμητικής είναι το σύνολο των συμβόλων

$L_A = \{+, \cdot, 0, <,=\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \exists, \forall, (,), x_1, x_2, \ldots\}$.

Με το παραπάνω αλφάβητο φτιάχνουμε όρους (terms) και τύπους (formulas) και προτάσεις. Για παράδειγμα: $s(x) + s(y \cdot s(0))$, $s(0)$. $s(s(0)))$ είναι όροι, με τον δεύτερο να είναι κλειστός (δεν περιέχει μεταβλητές).

Δίνουμε ένα ακόμη παράδειγμα για την ιδιότητα P(x): «Ο x είναι πρώτος», η οποία γράφεται: $(\forall y)(y|x \rightarrow y=x \vee y=1)$, όπου η συντομογραφία της διαίρεσης του y με το x γίνεται με το y|x. Ενώ η ιδιότητα: «Υπάρχουν άπειροι πρώτοι» γράφεται:$(\forall x)(\exists y)(x<y\land P(y))$.

Ορισμός 2 Όταν σε έναν τύπο δεν υπάρχει ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής, τότε ο τύπος λέγεται **κλειστός** και αποτελεί **πρόταση** στο πλαίσιο της συμβολικής γλώσσας της κατηγορηματικής γλώσσας .

Έτσι την πρόταση: «Κάθε φυσικός που είναι πολλαπλάσιο του 4 είναι άρτιος», θα μπορούσαμε να την συμβολίσουμε με τον τύπο- πρόταση:$\boldsymbol{\forall x(B(x)\rightarrow \Gamma(x))}$**,** όπου B(x)= «O x είναι πολλαπλάσιο του 4» που γράφεται $\exists y(x=4.y)$ και Γ(x)= «O x είναι άρτιος» που γράφεται: $\exists y(x = 2.y)$.

2.3 Η πρώτη παρουσίαση των ΘΜΠ

Όπως αναφέρθηκε ο Gödel απέδειξε το θεώρημα πληρότητας και μετά από λίγο το θεώρημα μη πληρότητας (το πρώτο από τα δύο ΘΜΠ), τα οποία έχουν διαφορετικό πλαίσιο αναφοράς. Μέχρι τότε, μόνο ο Emil Post, το 1922, είχε κάποιες αποσπασματικές αναφορές στη μη πληρότητα, εξετάζοντας τα «*Principia Mathematica*». Όμως δεν ήταν ικανοποιημένος από τις μεθόδους του και δεν δημοσίευσε ποτέ την εργασία του, που πραγματευόταν μια εκδοχή αυτού που αργότερα ονομάστηκε «*Church-Turing thesis*».

Στις 7 Σεπτέμβριου του 1930, σε ένα συνέδριο στο Königsberg της Αυστρίας, με θέμα «Επιστημολογία των Θετικών επιστήμων», ο 25χρονος Gödel ανακοίνωσε πρώτη φορά την εργασία του. Λίγο πριν αποκάλυψε τις ανακαλύψεις του στον **Carnap**,[16] ο οποίος εκείνη την εποχή ήταν αναγνωρισμένος λογικός. Όμως ο Carnap ως γνήσιος θετικιστής, ήταν βαθιά επηρεασμένος από την θεώρηση ότι οι γνώσεις είναι παρατηρήσιμες μόνο εμπειρικά, δηλαδή κυρίως μέσω πειραμάτων και ότι απόδειξη και αλήθεια είναι ταυτισμένες. Έτσι όχι μόνο δεν εκτίμησε σωστά τα θεωρήματα του Gödel , αλλά υποστήριξε πως η συνέπεια πρέπει να αποτελεί τη βάση των τυπικών μαθηματικών Ένα χρόνο μετά παραδέχθηκε πως ακόμα δεν είχε καταλάβει τα αποτελέσματα των ΘΜΠ. Η μικρή απήχηση που είχε η ανακοίνωση της εργασίας του Gödel στο συνέδριο, δεν αποτυπώθηκε καν στο επιστημονικό περιοδικό

[16] Μαθητής του Frege και μέλος του «Κύκλου της Βιέννης» , όπως και ίδιος ο Gödel

«Erkenntnis», όπου ο γραμματέας του συνεδρίου, Hans Reichenbach δεν τον συμπεριέλαβε στο άρθρο του για τα αποτελέσματα του συνεδρίου. Όταν όμως έμαθε ότι ο Gödel θα δημοσίευε την εργασία του σε επιστημονικό περιοδικό, επανόρθωσε ζητώντας του μια συνοπτική παρουσίαση της εργασίας του.

Ο Gödel παρουσίασε και απέδειξε το (πρώτο) θεώρημα της μη πληρότητας σε ένα αυστριακό επιστημονικό περιοδικό το 1931. Ο τίτλος της εργασίας ήταν: *«On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I»*.(Για τις τυπικά μη αποκρίσιμες προτάσεις στις Αρχές των Μαθηματικών και στα σχετικά συστήματα Ι). **Το άρθρο του περιείχε σαράντα έξι πρωταρχικούς ορισμούς και πολλά προκαταρκτικά θεωρήματα**. Γενικότερα τα ΘΜΠ ήταν μεν επαναστατικά και αργότερα προκάλεσαν «σάλο», όμως χρειάστηκαν χρόνια για να τα χωνέψει η μαθηματική και η φιλοσοφική κοινότητα. Ο Paul Bernays μαθητής του Hilbert, δυσκολευόταν με κάποιες λεπτομέρειες της απόδειξης και ζήτησε βοήθεια από τον Gödel .

Με αυτή την εργασία ο Gödel παρουσίασε και απέδειξε το πρώτο ΘΜΠ. Το Μέρος ΙΙ της εργασίας δεν γράφτηκε ποτέ, αφού η απόδειξή του είναι συνέπεια του πρώτου ΘΜΠ και απλά περιορίστηκε σε μια σκιαγράφησή του (το μη τυπικό επιχείρημα που παρουσίασε ήταν στην ουσία αρκετά πειστικό για τους αναγνώστες του) Το 1939, στο βιβλίο δύο τόμων «*Grundlagen der Mathematik*» (Οι Βάσεις των Μαθηματικών), δόθηκε αναλυτική απόδειξη από τους **Bernays και Hilbert**.

Στο συνέδριο στο Königsberg, ανάμεσα στους παριστάμενους ήταν ο Ούγγρος μαθηματικός **John von Neumann**, ένα από τα μεγάλα ονόματα μαθηματικών του εικοστού αιώνα και αντικείμενο διαφόρων ανέκδοτων σχετικά με την εκπληκτική του ικανότητα γρήγορής αντίληψης. Κατανόησε αμέσως την απόδειξη του Gödel, οποίος δεν είχε ακόμη φτάσει στο δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας, και η απόδειξή του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας δεν μπορούσε να εφαρμοστεί στην αριθμητική Peano αλλά μόνο σε κάπως ισχυρότερες θεωρίες. Ο Neumann προχώρησε ένα βήμα παραπέρα και απέδειξε το δεύτερο ΘΜΠ, έγραψε δε στον Gödel σχετικά με αυτό, αλλά ο Gödel ήδη το συμπεριέλαβε στην εργασία που έγινε αποδεκτή το 1931.

Τα ΘΜΠ είναι αυστηρά αποτελέσματα για αξιωματικές θεωρίες που μπορούν να διατυπωθούν στην πρωτοβάθμια λογική, όπως η **Αριθμητική Robinson** αλλά και πιο ισχυρές όπως η αριθμητική **Peano** και η **θεωρία συνόλων Zermelo Fraenkel**

2.4 Η ιδέα της τυπικής αξιωματικοποιήσιμης θεωρίας, αποκρίσιμες προτάσεις, πληρότητα

Στην έκφραση «related systems» με τον όρο «σύστημα» εννοούμε μια τυπική αξιωματικοποιήσιμη τυπική θεωρία **T**.

Η T περιλαμβάνει:

α) την αποτελεσματικά **τυποποιημένη γλώσσα, L**

β) ένα αποτελεσματικά αποκρίσιμο σύνολο αξιωμάτων **A**

γ) ένα αποτελεσματικό τυπικό αποδεικτικό σύστημα από το οποίο να συνάγονται θεωρήματα μέσω των αξιωμάτων.

Ορισμός 3 Μια ιδιότητα P είναι αποτελεσματικά **αποκρίσιμη (ή αποφασίσιμη)** αν και μόνο αν (ανν) υπάρχει ένας αλγόριθμος (πεπερασμένο σύνολο οδηγιών καθοριστικά υπολογίσιμων), ώστε μέσα σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων να αποφασίζει ότι την ιδιότητα P έχουν όλα τα αντικείμενα στα οποία αναφέρεται η P.

Θεωρητικά ένας υπολογιστής κάνει βήματα ρουτίνας (χωρίς περιορισμούς υλικού ή μνήμης) και υλοποιεί ένα τέτοιο αλγόριθμο. Επίσης ένα σύνολο Σ θα είναι αποτελεσματικά αποκρίσιμο αν η ιδιότητά του «ανήκειν» σε αυτό το σύνολο, είναι αποτελεσματικά αποκρίσιμη.

Γνωρίζουμε ότι μια γλώσσα είναι ένα σύνολο συμβόλων που έχει ένα **συντακτικό** και μια **σημασιολογία**. Το συντακτικό αποτελείται από τα σύμβολα που χρησιμοποιεί η γλώσσα και από κανόνες, με τους οποίους τα σύμβολα μπορούν να συνδυαστούν. Έτσι το συντακτικό καθορίζει ποιοί χαρακτήρες συμβόλων σχηματίζουν όρους, ποιοι σχηματίζουν **καλά διατυπωμένους τύπους (κδτ)** και ποιοι σχηματίζουν προτάσεις (οι οποίες μπορούν να είναι αληθείς ή ψευδείς).
Η σημασιολογία καθορίζει μια αντιστοιχία μεταξύ α) συμβόλων, συνδυασμών συμβόλων, προτάσεων της γλώσσας και β) εννοιών του περιβάλλοντος στο οποίο αναφέρονται. Έτσι αποδίδει αληθείς συνθήκες σε κάθε πρόταση της γλώσσας. Η

σημασιολογία (δηλαδή το νόημα) της πρότασης πρέπει να προσδιοριστεί από το συγγραφέα της γλώσσας μέσω μιας **ερμηνείας (interpretation)**

Ορισμός 4 Μια αποτελεσματική **τυπική γλώσσα L** έχει ένα πεπερασμένο πλήθος από βασικά σύμβολα, συντακτικούς κανόνες τέτοιους ώστε οι ιδιότητες των όρων, των κδτ, των κδτ με μια μόνο ελεύθερη μεταβλητή, των προτάσεων κλπ. να είναι αποτελεσματικά αποκρίσιμες.

Απαιτήσεις ώστε μια θεωρία να είναι αξιωματικοποιήσιμη

α) Πρέπει πρώτα να καθορίσουμε ένα βασικό πεπερασμένο λεξιλόγιο, κανόνες για τη δημιουργία εκφράσεων και ένα μηχανιστικό τρόπο, ώστε να μπορεί να αποφασιστεί αν μια έκφραση είναι σωστά διατυπωμένη από αυτούς τους κανόνες. Επίσης θέλουμε κανόνες για το τι είναι και τι δεν είναι πρόταση, και αυτό θα εξασφαλίζεται από ένα προγραμματισμένο υπολογιστή ο οποίος θα εξετάζει μηχανιστικά όλες τις εκφράσεις.
β) Για να αποφύγουμε τις ασάφειες πρέπει η τυπική θεωρία να έχει μια σημασιολογία που θα δίνει την ερμηνεία της γλώσσας L, καθορίζοντας αληθείς τιμές σε κάθε L-πρόταση και με ένα πάλι μηχανιστικό τρόπο θα εξασφαλίζει τη μοναδική ερμηνεία τους.
γ) Στη λογική, μια θεωρία είναι ένα σύνολο προτάσεων που είναι κλειστό ως συμπερασματικό σύστημα, δηλαδή, αν περιέχει τις προτάσεις φ και $\varphi \rightarrow \psi$, τότε περιέχει και την ψ. Έτσι μια θεωρία T οφείλει να προκύπτει από ένα **παραγωγικό σύστημα (ΠΣ)** όπου κάθε πρόταση μπορεί να παραχθεί από άλλες T-προτάσεις μέσω του ΠΣ. Ειδικότερα ένα σύνολο A από προτάσεις θα έχει το ρόλο των αξιωμάτων, αν κάθε T-πρόταση μπορεί να παραχθεί από το A μέσα στην T. Εδώ πάλι ένας μηχανιστικός τρόπος θα αποφασίζει αν μια δοσμένη πρόταση είναι ή όχι αξίωμα. δ) Τέλος απαιτείται ένα **αποδεικτικό σύστημα**, δηλαδή ένα σύνολο από κανόνες όπου από τα αρχικά αξιώματα παράγονται θεωρήματα. Απαιτούμε δε μια σειρά από κδτ να αποφασίζεται αποτελεσματικά αν είναι πράγματι απόδειξη, παραγόμενη από το σύνολο αξιωμάτων A, χρησιμοποιώντας το αποδεικτικό σύστημα.

Ορισμός 5 Μια **αξιωματικοποιήσιμη τυπική θεωρία T**, περιέχει μια τυπική γλώσσα **L**, μια ορισμένη κλάση L-προτάσεων επιλεγμένη ως αξιώματα, όπου είναι αποτελεσματικά αποφασίσιμο τι είναι αξίωμα, και έχει ένα αποδεικτικό σύστημα (αποτελεσματικά αποφασίσιμο) ώστε από ένα δοσμένο πλήθος κδτ να συνάγονται αποδείξεις.

Έτσι είναι εύκολο να ελέγχουμε αν ένα σύνολο από προτάσεις συνιστούν απόδειξη. Μεγάλης σημασίας είναι η κατανόηση-αποσαφήνιση ότι αν μια πρόταση φ έχει μια υποτιθέμενη T-απόδειξη, τότε αυτό μπορούμε να το αποφασίσουμε αποτελεσματικά από το αποδεικτικό σύστημα, **αλλά όμως δεν μπορούμε να ξέρουμε αν γενικά υπάρχει μια απόδειξη της φ**. Για παράδειγμα στην αριθμητική υπάρχει η πρόταση γνωστή σαν εικασία του Γκόλντμπαχ: *« Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος από 2 είναι το άθροισμα δύο πρώτων»* που δεν έχει ακόμη ούτε αποδειχθεί ούτε διαψευσθεί. Στο εξής όταν λέμε τυπικές ή αξιωματικές θεωρίες θα εννοούμε αποτελεσματικά αξιωματικές τυπικές θεωρίες. O Hilbert αναφέρει [21],ότι η αξιωματική τυποποίηση μιας μαθηματικής θεωρίας T, μας δίνει νέα τυπικά αντικείμενα, τους T-κδτ και τις T-αποδείξεις που είναι κατάλληλα θέματα για νέες τυπικές διερευνήσεις.

Ορισμός 6 Έστω φ πρόταση της L, με $\mathbf{T\vdash\varphi}$ συμβολίζουμε: η φ αποδεικνύεται από την θεωρία T. Αν η φ πρόταση και $T\vdash\varphi$ τότε η φ θεώρημα της T.

Ορισμός 7 Εστω Σ ένα σύνολο πεπερασμένο (ή άπειρο) από προτάσεις σ_1, σ_2, $\sigma_3,\ldots\sigma_\nu$. Τότε, $\mathbf{\Sigma\models\varphi}$ συμβολίζει ότι η πρόταση φ είναι συνέπεια του Σ. Αυτό ισχύει όταν για κάθε ερμηνεία η οποία επαληθεύει κάθε πρόταση του Σ τότε αναγκαστικά επαληθεύει και την πρόταση φ.

Αυτό μπορεί να φανεί καλύτερα στον παρακάτω πίνακα αληθοτιμών

	…	σ_1	σ_2	…	σ_ν	φ
	…	…	…		…	…
Ερμηνεία κ		Αληθής	Αληθής		Αληθής	Αληθής
	…	…	…		…	…

Πίνακας 2 Ερμηνεία πίνακα αληθοτιμών, σε ένα πεπερασμένο σύνολο Σ

Εδώ η **ερμηνεία κ** είναι μια γραμμή του πίνακα όπου επαληθεύει το $\Sigma=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,\ldots\sigma_\nu\}$και την συναγόμενη πρόταση φ. Το σύμβολο $\vdash$ είναι μία τυπικά συντακτική σχέση και δηλώνει την αποδειξιμότητα μέσα στην T. Ενώ το σύμβολο ⊨ δηλώνει τη σημασιολογική συνεπαγωγή. Έστω η Τ είναι κτισμένη με την α΄ τάξης γλώσσα και το αποδεικτικό της σύστημα βασίζεται στην α΄ τάξης λογική του κατηγορηματικού λογισμού.

Στην περίπτωση αυτή αν έχουμε **Τ⊨φ, τότε Τ⊢φ**, δηλαδή τα καθιερωμένα α΄ τάξης επαγωγικά συστήματα είναι πλήρη. Αυτό είναι και το **θεώρημα πληρότητας που απέδειξε ο Gödel** , χρησιμοποιώντας ένα σύστημα θεωρίας τύπου Hilbert κατά τη διάρκεια του διδακτορικού του.

Ορισμός 8 Αν φ∈L και Τ θεωρία της γλώσσας L, τότε η Τ **αποφασίζει τυπικά** την φ ανν **Τ⊢φ ή Τ⊢¬φ,** όπου με **¬φ** συμβολίζουμε την άρνηση της φ.

Ορισμός 9 Η θεωρία Τ **δεν αποφασίζει τυπικά** την φ ανν **Τ⊬φ** και **Τ⊬¬ φ**

Ορισμός 10 Η θεωρία Τ λέγεται **πλήρης** ανν τυπικά αποφασίζει κάθε κλειστό κδτ, δηλαδή ∀ φ∈L είναι **Τ⊢φ** ή **Τ⊢¬φ**

Φανερό ότι η Τ δεν θα είναι πλήρης, αν ∃ φ∈L ώστε Τ⊬φ και Τ⊬¬φ δηλαδή αν υπάρχουν μη αποκρίσιμες προτάσεις στην Τ.
Είναι εύκολο να κατασκευαστούν πλήρεις θεωρίες αρκεί να παραλείψουμε κάποιες παραδοχές, το ζητούμενο είναι φυσικά να είναι και «ισχυρές» θεωρίες.

2.5 Η τυποποιημένη γλώσσα της στοιχειώδους αριθμητικής

Η στοιχειώδης αριθμητική αναφέρεται στους φυσικούς και τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Η τυποποιημένη γλώσσα της στοιχειώδους αριθμητικής συνήθως συμβολίζεται με **L=<+,*,s,0>.** Αυτή η γλώσσα θα τυποποιεί την στοιχειώδη αριθμητική και θα δημιουργεί:

α) τη θεμελιώδη δομή όπου θα υπάρχει το «0» δηλαδή ο αριθμός μηδέν , η μονομελής συνάρτηση s του διαδόχου ώστε να προκύπτουν όλοι οι διάδοχοί του μηδέν. Επίσης απαιτούμε διαφορετικοί αριθμοί να έχουν διαφορετικούς διαδόχους, και ότι η ακολουθία των φυσικών δεν θα είναι κυκλική, αλλά θα οδηγείται προς το άπειρο.

β) Τις διμελείς συναρτήσεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και τις ιδιότητες τους.

Ένα θέμα που απασχόλησε τους μαθηματικούς στα τέλη του 19^{ου} αιώνα είναι η επιλογή των Αξιωμάτων ως προς το πλήθος τους και τη φύση τους. Αν αναπαραστήσουμε την επιλογή των αρχικών αξιωμάτων με τη μία πλευρά ενός παραλληλογράμμου και την λογική με την άλλη πλευρά τότε η παραγόμενη Μαθηματική θεωρία μπορεί να αναπαρασταθεί από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου. Προφανώς αλλάζοντας μια πλευρά αλλάζει και η διαγώνιος δηλαδή η Μαθηματική θεωρία. Για πολύ καιρό οι μαθηματικοί άλλαζαν μόνο το σύνολο των αρχικών ισχυρισμών (αξιώματα), ενώ το σύνολο των κανόνων λογικής εθεωρείτο παγκοσμίως ως σταθερό, απόλυτο και αμετάβλητο. Υπήρχε η γενική εντύπωση ότι οι νόμοι του Αριστοτέλη ήταν σύμφυτα του ανθρώπινου συλλογισμού και αποτελούσαν γνωρίσματα της δομής του κόσμου. Όπως άλλα απόλυτα πράγματα στον κόσμο και αυτό αμφισβητήθηκε και ανατράπηκε. Το 1921 ο διακεκριμένος Αμερικανός λογικός **A. Church** δήλωνε[13]: *«Δεν αποδίδουμε κανένα χαρακτήρα μοναδικότητας ή αλήθειας σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύστημα λογικής…»*

Η φύση των αξιωμάτων είναι ένα θέμα που απασχόλησε τη μαθηματική σκέψη. Σύμφωνα με τον I.Kant, τα αξιώματα συμπυκνώνουν «διαισθήσεις» με τις οποίες αντιλαμβανόμαστε την βασική δομή των αριθμών και τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. O Frege πήγε ένα βήμα πιο πέρα από την Καντιανή διαίσθηση και υιοθέτησε την άποψη ότι τα αξιώματα είναι αναλυτικά και ότι ο λογικός συλλογισμός που βασίζεται στους ορισμούς είναι αρκετός για να μας δώσει τα αξιώματα της αριθμητικής. Όμως ο Russel σταμάτησε τον λογικισμό του Frege με τα παράδοξά του, έδειξε την ασυνέπεια του έργου του και δεν έμεινε σε αυτό αλλά συνέχισε [21] με την υπόσχεση: «*όλα τα Μαθηματικά (ναι όλα τα Μαθηματικά!) κανονίζονται αποκλειστικά με έννοιες που μπορούν προσδιοριστούν βάσει ενός πολύ μικρού αριθμού λογικών εννοιών και…όλες οι προτάσεις παράγονται από ένα πολύ μικρό αριθμό θεμελιακών αρχών-αξιωμάτων»*.

Στην υπόσχεση αυτή ανταποκρίθηκε γράφοντας το 1903 τα «The Principles of Mathematics» και τα «Principia Mathematica» (1910, 1912, 1913) με την συνεισφορά του Whitehead. Το σχέδιό του ήταν να δημιουργηθούν βάσει της λογικής κάποια αξιώματα και ορισμοί και από αυτά να παράγονται οι νόμοι της βασικής αριθμητικής. Στην πορεία όμως αναγκάστηκαν να υιοθετήσουν και άλλα αξιώματα (του απείρου και της αναγωγικής αρχής[17]). Εκτός του ότι αυτές οι επιπλέον παραδοχές δημιούργησαν προβλήματα δυσπιστίας στον λογικισμό, χαρακτηριστικό είναι ένα πικρόχολο σχόλιο[18] που έκαναν οι δύο συγγραφείς όταν κατάφεραν να αποδείξουν ότι «1+1=2» στον τόμο II σελίδα 86.

Τα «Principia Mathematica» προβλημάτισαν με την σαφήνεια και την αυστηρότητά τους και θεωρούνται υπό αυτή την έννοια ένα βήμα πίσω από τον Frege, αλλά το μεγάλο πρόβλημα του εγχειρήματος προέρχεται από το έργο του Gödel. Αυτό το έργο, σαμποτάρει όχι μόνο τα «Principia Mathematica» αλλά δείχνει ότι κάθε είδους μορφή επαγωγισμού ακόμα και για την βασική αριθμητική έχει ένα καίριο πρόβλημα.

Οι υποστηρικτές του λογικισμού αλλά και του φορμαλισμού ήθελαν να εντοπίσουν όλες τις αλήθειες της βασικής αριθμητικής (σχετικά με την δομή <**+**,*****, **s**, **0**>) χωρίς να παραλείψουν καμία. Δηλαδή ήθελαν να δημιουργήσουν μια πλήρη θεωρία. Αλλά αυτό δεν μπορεί να συμβεί αφού σύμφωνα με μια πρόχειρη διατύπωση του πρώτου ΘΜΠ του Gödel: δε μπορεί να υπάρξει μια θεωρία πλήρης που να παράγει όλες τις αλήθειες της αριθμητικής.

[17] που δηλώνει ότι σε κάθε τύπο για κάθε κλάση C υπάρχει μια κατηγορηματική κλάση που έχει τα ίδια στοιχεία όπως η C. Ο Russel την αναγνώρισε ως ουσιαστική, αλλά δεν είχε κανένα πειστικό επιχείρημα για αυτή την αρχή. Αναγνώρισε ότι είναι ένα ψεγάδι στον λογικισμό του.

[18] «η παραπάνω πρόταση μερικές φορές είναι χρήσιμη»

Κεφάλαιο 3 Μια πρώτη προσέγγιση- σκιαγράφηση των ΘΜΠ

3.1 Το πρώτο ΘΜΠ από σημασιολογικής πλευράς.

Ορισμός 11 Μια ερμηνευμένη τυπική γλώσσα L λέμε ότι περιλαμβάνει τη γλώσσα της βασικής αριθμητικής, αν έχει τα λογικά σύμβολα που περιγράφονται στην ενότητα 2.1, συμπεριλαμβανομένου του συμβόλου της ισότητας, καθώς επίσης i) του όρου 0

ii) σύμβολα συναρτήσεων για το διάδοχο , την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

iii) ένα κατηγόρημα N έτσι ώστε:

- το κατηγόρημα N να έχει ως έκταση το σύνολο των φυσικών αριθμών
- το 0 να παριστάνει το μηδέν του συνόλου των φυσικών αριθμών
- οι συναρτήσεις που ερμηνεύουν τα σύμβολα του ii), περιοριζόμενες στο σύνολο των φυσικών αριθμών, να παριστάνουν τις συνηθισμένες έννοιες διαδόχου, πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, αντίστοιχα.

Ορισμός 12 Μια θεωρία T είναι **ορθή (ή βάσιμη)** ανν τα αξιώματά της είναι αληθή και η λογική της εξασφαλίζει ότι όλα τα θεωρήματα είναι αληθή.

Ορισμός 13 Μια θεωρία T είναι **συνεπής** ανν δεν υπάρχει φ ώστε $T\vdash \varphi$ και $T\vdash \neg\varphi$

Είμαστε λοιπόν τώρα σε θέση να διατυπώσουμε μια σημασιολογική εκδοχή του πρώτου ΘΜΠ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν T είναι μια **ορθή τυπική αξιωματικοποιήσιμη θεωρία** της οποίας η γλώσσα L περιέχει την βασική αριθμητική, τότε θα υπάρχει μια πρόταση $\mathbf{G_T}$ της βασικής αριθμητικής, ώστε **$T\nvdash G_T$ και $T\nvdash\neg G_T$, οπότε η T είναι μη πλήρης**.

Ορισμός 14 Αν η γλώσσα L περιέχει την βασική αριθμητική, περιέχει τον όρο «0» για το μηδέν και την συνάρτηση s για τους διαδόχους του, τότε περιέχει τους όρους **s0, ss0, sss0**,… και αυτά λέγονται **καθιερωμένα αριθμητικά (standard numerals)** της L. ΄

Για συντομία για τον αριθμό $\underbrace{\boldsymbol{ss\ldots s}}_{\text{n φορές}}\mathbf{0}$ θα γράφουμε το τυποποιημένο **«$\bar{\mathrm{n}}$»** αντίστοιχο του φυσικού n. Έτσι η γλώσσα της θεωρίας T που θα περιέχει τη γλώσσα της βασικής αριθμητικής θα περιλαμβάνει τυποποιημένα αριθμητικά που θα υποδηλώνουν τους αριθμούς.

Ορισμός 15 Έστω n, m φυσικοί αριθμοί. Ο τυπικά κδτ φ(x) της L θα εκφράζει την αριθμητική ιδιότητα P ανν $\varphi(\bar{\mathrm{n}})$ είναι αληθής, που σημαίνει ότι και ο n έχει την ιδιότητα P. Όμοια ο τυπικά κδτ *ψ(x,y)* θα εκφράζει τη σχέση R ανν $\psi(\bar{\mathrm{m}}, \bar{\mathrm{n}})$ είναι αληθής, όπου m έχει την σχέση R με το n. Επίσης ο τυπικά κδτ *χ(x,y)* θα εκφράζει τη συνάρτηση f ανν $\chi(\bar{\mathrm{m}}, \bar{\mathrm{n}})$ είναι αληθής όταν *f(m) = n*.

Για παράδειγμα αν P είναι η ιδιότητα ότι: δεν υπάρχει φυσικός που να προστεθεί στο 1 και να δώσει 0, τότε αυτή εκφράζεται από την φ(x): **¬(∃x (x+s0=0)).** Προφανώς ο αριθμός 2 ικανοποιεί την P και η $\varphi(\bar{2})$ είναι αληθής αφού είναι αληθής και η τυπική σχέση **¬(ss0+s0=0)**

Περιγραφή των βημάτων της απόδειξης του θεωρήματος 1

Βήμα 1 Σήμερα είμαστε εξοικειωμένοι με την ιδέα να αντιστοιχούμε δεδομένα με αριθμούς. Έστω ότι έχουμε εγκαταστήσει την αρίθμηση Gödel, που είναι ένας τρόπος να αντιστοιχούμε σύμβολα, τύπους και προτάσεις, σε αριθμούς. Ορίζουμε στην T τις αριθμητικές ιδιότητες[19] των κδτ F_T, των κδτ S_T που αποτελούν προτάσεις και στις προτάσεις PR_T των κδτ που αποτελούν απόδειξη, ως εξής:

$F_T(n)$ ανν n είναι ο κωδικός αριθμός μιας T-κδτ

$S_T(n)$ ανν n είναι ο κωδικός αριθμός μιας T-πρότασης

$PR_T(m,n)$ ανν είναι m ο κωδικός αριθμός μιας T-απόδειξης της T-πρότασης με κωδικό αριθμό n.

Αφού η T είναι μια τυπική αξιωματικοποιήσιμη θεωρία οι F_T, S_T, PR_T, είναι αποτελεσματικά αποφασίσιμες. Για παράδειγμα αν μια T-απόδειξη είναι έγκυρη και αποδεικνύει το υποτιθέμενο συμπέρασμά της, τότε μπορεί να πάρει τον κωδικό m και

[19] Η πλάγια γραφή των τύπων υποδηλώνει την διάκριση μεταξύ των αριθμητικών σχέσεων μιας άτυπης θεωρίας και μιας τυπικής θεωρίας.

να είναι πράγματι η απόδειξη της συμπερασματικής πρότασης με κωδικό n. Αυτό το αποφασίζει *η* $PR_T(m,n)$.

<u>Βήμα 2</u> Εκφράζουμε σχέσεις-ιδιότητες στην T.

Δείχνουμε πως χτίζουμε μια τυπική $PR_T(x,y)$ που εκφράζει την ιδιότητα PR_T ώστε η $\mathrm{PR_T}(\overline{\mathrm{m}},\overline{\mathrm{n}})$ αληθής, όταν η $PR_T(m,n)$ είναι αληθής στην αριθμητική, δηλαδή όταν m είναι ο κωδικός αριθμός μιας T-απόδειξης της T-πρότασης με κωδικό αριθμό n. Βασιζόμαστε στο γεγονός ότι η βασική αριθμητική μπορεί να εκφράσει **πρωταρχικές αναδρομικές εκφράσεις** όπως οι F_T, S_T, PR_T και για κάθε κωδικό αριθμός n, μπορούμε να καταλάβουμε αν αυτός αντιστοιχεί ή όχι σε μια κδτ ή σε μια πρόταση ή σε μια απόδειξη.

<u>Βήμα 3</u> Η κατασκευή της πρότασης Gödel.

Ορίζουμε την πρόταση $\mathbf{Prove_T(\overline{n})} =_{\text{ορισμός}} \mathbf{\exists x PR_T(x, \overline{n})}$, που λέει ότι υπάρχει απόδειξη μιας πρότασης με κωδικό αριθμό n. Θεωρούμε κατόπιν την **πρόταση Gödel $\mathbf{G_T}$** που έχει κωδικό αριθμό g με ορισμό $\boxed{G_T \Leftrightarrow \neg \mathbf{Prove_T(\bar{g})}}$, που λέει ότι δεν υπάρχει απόδειξη της πρότασης με κωδικό αριθμό g. Έτσι η G_T είναι αληθής ανν η ¬ $\mathbf{Prove_T}$ ($\bar{g}$) είναι αληθής, δηλαδή ανν η πρόταση με αριθμό g δεν είναι θεώρημα, (δηλαδή ανν η G_T δεν είναι θεώρημα), δηλαδή είναι ψευδής. Έτσι η G_T δηλώνει: **«δεν είμαι αποδείξιμη στην T»**

<u>Βήμα 4</u> Θεωρώντας ότι η T είναι ορθή τότε:

Έστω $T \vdash G_T$ τότε η G_T είναι θεώρημα και αφού σύμφωνα με την ερμηνεία της είναι ψευδής, τότε η T αποδεικνύει ένα ψευδές θεώρημα και ως εκ τούτου υπάρχει αντίφαση οπότε δεν είναι ορθή, άρα $T \nvdash G_T$.

Έστω $T \nvdash G_T$ τότε η G_T είναι αληθής σύμφωνα με την ερμηνεία της. Οπότε η ¬ G_T είναι ψευδής και αφού η T είναι ορθή τότε $T \nvdash \neg G_T$.

Άρα ισχύει **$T \nvdash G_T$ και $T \nvdash \neg G_T$, οπότε η T είναι μη πλήρης.**

Ένα ενδιαφέρον θέμα μήπως αν η T επεκταθεί μπορεί να γίνει πλήρης; Η απάντηση είναι αρνητική, αφού: Υποθέτοντας ότι η T είναι ορθή και περιέχει την βασική αριθμητική τότε θα υπάρχει μια αληθής πρότασή της G_T, ώστε $T \nvdash G_T$ και $T \nvdash \neg G_T$. Αυτό δεν σημαίνει ότι η G_T είναι απολύτως μη αποδείξιμη, απλά δεν είναι αποδείξιμη στη θεωρία T. Αν συμβολίσουμε με $T_1 = T + G_T$ μια θεωρία T_1 που είναι η T με επιπλέον αξίωμα την πρόταση G_T τότε η T_1: α) είναι ορθή (αφού τα T-αξιώματα είναι αληθή, η G_T είναι αληθής και η εγκυρότητα της λογικής παραμένει). β) Είναι τυπική γλώσσα, αφού προσθέτοντας ένα αξίωμα παραμένει αποφασίσιμη. γ) Περιέχει τη γλώσσα της βασικής αριθμητικής.

Έτσι ισχύει το πρώτο ΘΜΠ για την T_1, οπότε μπορούμε να βρούμε μια πρόταση G_{T1} ώστε $T_1 \nvdash G_{T1}$ και $T_1 \nvdash \neg G_{T1}$ οπότε η T_1 είναι μη πλήρης. Επίσης αφού η T_1 είναι ισχυρότερη από την T, τότε $T \nvdash G_{T1}$ και $T \nvdash \neg G_{T1}$ οπότε η T παραμένει μη πλήρης παρά την ενίσχυσή της. Αυτό φυσικά συνεχίζεται και η ενισχυμένη θεωρία θα παραμένει μη πλήρης, εκτός και αν σταματήσει να είναι ορθή ή αποτελεσματικά αξιωματικοποιήσιμη. Έτσι η θεωρία T δεν μπορεί να καταστεί πλήρης ακόμα και αν επαυξηθεί.

Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα που τίθεται είναι ότι η πρόταση G_T περιέχει την αυτοαναφορά «δεν είμαι αποδείξιμη στην T» και όμως οδηγεί σε θεώρημα και όχι σε αντίφαση, αυτό θα αναλυθεί στο τελευταίο κεφάλαιο.

Το παραπάνω θεώρημα δεν είναι αυτό που αναφέρουμε ως πρώτο ΘΜΠ του Gödel, αλλά μας λέει τι συνάγεται από σημασιολογικής υπόθεσης όταν η T είναι ορθή, τυπικά αξιωματικοποιήσιμη θεωρία και η ορθότητα της καθορίζεται σε σχέση με την έννοια της αλήθειας, η οποία είναι σημασιολογική και όχι με την έννοια της τυπικής αποδειξιμότητας της ενότητας 2.4. Την εποχή της εμφάνισης των ΘΜΠ από τη μια οι τυπικές θεωρίες «εγκλώβιζαν» μεν την έννοια της αλήθειας αλλά από την άλλη οι προ-τυπικές αισθητικές αντιλήψεις περί αλήθειας οδήγησαν σε παράδοξα και δημιούργησαν προβλήματα δυσπιστίας στον θετικιστικό λογικισμό. Ήταν πολύ σημαντικό για τον Gödel να βασιστεί όχι σε σημασιολογικές έννοιες αλλά σε συντακτικές για την απόδειξη των θεωρημάτων του. Έτσι με την παραδοχή **της συνέπειας αντί της ορθότητας** της T, παρακάτω διατυπώνουμε το πρώτο ΘΜΠ από συντακτικής πλευράς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Για κάθε **συνεπή τυπική αξιωματικοποιήσιμη θεωρία** T που μπορεί να αποδείξει μια ορισμένη ποσότητα αριθμητικής (και έχει μια ορισμένη επιθυμητή πρόσθετη συντακτικά ορισμένη ιδιότητα[20]), υπάρχει μια πρόταση $\mathbf{G_T}$ της βασικής αριθμητικής, ώστε **$\mathbf{T \nvdash G_T}$ και $\mathbf{T \nvdash \neg G_T}$, οπότε η T είναι μη πλήρης.**

[20] Αφορά την ω-συνέπεια την οποία απέφυγε ο J. Barkley Rosser το 1936 στην απόδειξη του πρώτου ΘΜΠ

3.2 Μη πληρότητα και επαρκώς ισχυρές θεωρίες.

Ορισμός 16 Μια θεωρία T είναι αποφασίσιμη ανν η ιδιότητα να είναι μια πρόταση θεώρημα της T, είναι μια αποτελεσματικά αποφασίσιμη ιδιότητα, δηλαδή ανν υπάρχει μια μηχανιστική διαδικασία που καθορίζει αν η T αποδεικνύει ή όχι την φ, για κάθε δοσμένη πρόταση φ της T.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Κάθε συνεπής, πλήρης και τυπικά αξιωματικοποιήσιμη θεωρία T είναι αποφασίσιμη.

Απόδειξη

Έστω ότι το αποδεικτικό σύστημα της T είναι η Frege/Hilbert αξιωματική λογική, όπου οι αποδείξεις είναι γραμμικές ακολουθίες κδτ. Η T έχει ένα πεπερασμένο πλήθος βασικών συμβόλων τα οποία μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε μια «αλφαβητική διάταξη» και να κάνουμε μια μηχανιστική απαρίθμηση για όλους τους πιθανούς χαρακτήρες συμβόλων. Κατόπιν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για ζεύγη συμβόλων, για τριάδες κλπ. και να βάλουμε όλα αυτά σε μια σειρά. Έτσι γεννιούνται όλες οι δυνατές προτάσεις συμβόλων και θα υπάρχει ένας μηχανιστικός τρόπος που αποφασίζει αν μια πρόταση από κδτ είναι μια T-απόδειξη , δηλαδή θα ελέγχει αν κάθε κδτ είναι ένα αξίωμα είτε έπεται σαν συμπέρασμα από προηγούμενες κδτ , βάσει ενός κανόνα συμπερασμού. Αν μια πρόταση είναι επιτρεπτή, καλά δομημένη και αποδεικνύεται , τότε απαριθμεί τον τελευταίο κδτ , δηλαδή την θεωρούμε ως θεώρημα. Έτσι μπορούμε με αυτό τον τρόπο να παράγουμε μια λίστα με όλα τα T-θεωρήματα (κάθε θεώρημα είναι ο τελευταίος κδτ σε μια απόδειξη). Απαριθμώντας λοιπόν όλες τις προτάσεις μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια τυχαία πρόταση φ είναι θεώρημα. Με δεδομένη τη συνέπεια και την πληρότητα της T αυτός ο χωρίς περιορισμό «μνήμης» και «χρόνου» μηχανιστικός τρόπος εγγυημένα αποφασίζει αν η **φ** αληθής ή αν η **¬φ** αληθής.

Ορισμός 17 Μια ιδιότητα P **εκφράζεται** από τον ανοικτό κδτ φ(x) με μια ελεύθερη μεταβλητή στη γλώσσα L (που περιέχει τη βασική αριθμητική) ανν ∀ n

i) αν n έχει την ιδιότητα P τότε $\varphi(\overline{n})$ είναι αληθής

ii) αν n δεν έχει την ιδιότητα P τότε $\neg\varphi(\overline{n})$ είναι αληθής.

Ορισμός 18 Η θεωρία T **καταγράφει** (συλλαμβάνει) τον ανοικτό κδτ φ(x) ανν ∀ n

i) αν n έχει την ιδιότητα P τότε $T\vdash \varphi(\bar{n})$,

ii) αν η n δεν έχει την ιδιότητα P τότε $T\vdash \neg\varphi(\bar{n})$.

Αυτό που η γλώσσα μπορεί να εκφράσει και να αναπαραστήσει εξαρτάται από τον πλούτο των αξιωμάτων και των κανόνων συμπερασμού της. Θα θέλαμε βέβαια κάθε θεωρία όχι μόνο να εκφράζει αλλά και να συλλαμβάνει πολλές αριθμητικές ιδιότητες. Δηλαδή να υπάρχει θεωρητικά μια μηχανιστική διαδικασία που να αποφασίζει ότι ένας αριθμός n έχει μια ορισμένη ιδιότητα P.

Ορισμός 19 Μια τυπική θεωρία T (που περιλαμβάνει την αριθμητική) είναι **επαρκώς ισχυρή** ανν συλλαμβάνει όλες τις αποκρίσιμες αριθμητικές προτάσεις.

Είναι επιθυμητό να υπάρχει μια ιδεατή τυπική θεωρία αριθμητικής που θα μπορεί (ανεξάρτητα χώρου και χρόνου), να αποφασίζει αν ένας αριθμός έχει μια ορισμένη ιδιότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Μια συνεπής, επαρκώς ισχυρή, αξιωματικοποιήσιμη τυπική θεωρία T δεν είναι αποφασίσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η T αξιωματικοποιήσιμη τυπική θεωρία, επαρκώς ισχυρή, αποφασίσιμη και ακόμα έστω ότι είναι συνεπής. Δημιουργούμε μια μηχανιστική απαρίθμηση κδτ: $\boldsymbol{\varphi_0(x)}$, $\boldsymbol{\varphi_1(x)}$, $\boldsymbol{\varphi_2(x)}$, **…**και θέτουμε σε αλφαβητική σειρά όλους τους χαρακτήρες συμβόλων, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε τους ανοικτούς κδτ με ελεύθερη μεταβλητή την «x».

Ορίζουμε τώρα ότι $\boxed{\text{\textbf{ο n έχει την ιδιότητα D ανν }} \boldsymbol{T\vdash\neg\varphi_n(\bar{n})}}$

Αφού υποθέσαμε ότι η T είναι αποφασίσιμη τότε η ιδιότητα D είναι ιδιότητα αριθμών αποτελεσματικά αποφασίσιμη. Δεδομένου λοιπόν ενός αριθμού n, ένας μηχανισμός διατρέχει τους ανοικτούς κδτ μέχρι τον $\varphi_n(x)$. Τότε με μηχανιστικό τρόπο σχηματίζεται το αριθμητικό $\bar{n}$. Κατόπιν καλούμε την μηχανιστική διαδικασία (που αποφασίζει αν μια πρόταση είναι T-θεώρημα) να ελέγξει αν ο κδτ $\boldsymbol{\neg\varphi_n(\bar{n})}$ είναι θεώρημα. Δηλαδή υπάρχει ένας αλγόριθμος που αποφασίζει αν το n έχει την ιδιότητα D. Από την υπόθεση η T είναι αποτελεσματικά ισχυρή, οπότε μπορεί να συλλάβει όλες τις αριθμητικές ιδιότητες, τότε η D συλλαμβάνεται από κάποιο κδτ, ο οποίος

τελικά βρίσκεται μέσα στην απαριθμημένη λίστα των φ(x), έστω είναι ο $\varphi_d(x)$. Όμως:
Αν d έχει την ιδιότητα D τότε T⊢ $\varphi_d(\bar{d})$ και
αν d δεν έχει την ιδιότητα D τότε T⊢ ¬ $\varphi_d(\bar{d})$.
Βάσει όμως του ορισμού που δώσαμε ο d έχει την ιδιότητα D ανν T⊢¬$\varphi_d(\bar{d})$
Από τις τελευταίες προτάσεις συνάγεται ότι οι κδτ ¬$\varphi_d(\bar{d})$, $\varphi_d(\bar{d})$, είναι T-θεωρήματα. Οπότε η T είναι μη συνεπής. Άτοπο.

Πιο συνοπτικά η απόδειξη παριστάνεται με την ακόλουθη διαγωνοποίηση που αποτελεί την καρδιά της μεθόδου απόδειξης του πρώτου ΘΜΠ.
Πήραμε τους κδτ: $\varphi_n(x)$, n=0,1,2,…και θεωρήσαμε τις αρνήσεις των κδτ: $\varphi_0(\bar{0})$, $\varphi_1(\bar{1})$, $\varphi_2(\bar{2})$,… οι οποίες αποτελούν την διαγώνιο της διπλανής διάταξης.
Σε κάθε στοιχείο της διαγωνίου παρατηρούμε ότι ο δείκτης n είναι και ο τυπικός αριθμός $\bar{\mathbf{n}}$ και οι αρνήσεις των στοιχείων της αφορούν την ιδιότητα D και σχηματίζουν την τελευταία στήλη γνωστή και ως αντιδιαγώνιος

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		$\bar{n}$		αντιδιαγώνιος
φ_0	$\varphi_0(\bar{0})$	$\varphi_0(\bar{1})$	$\varphi_0(\bar{2})$	…	$\varphi_0(\bar{n})$	…	¬ $\boldsymbol{\varphi_0(\bar{0})}$
φ_1	$\varphi_1(\bar{0})$	$\varphi_1(\bar{1})$	$\varphi_1(\bar{2})$	…	$\varphi_1(\bar{n})$		¬ $\boldsymbol{\varphi_1(\bar{1})}$
φ_2	$\varphi_2(\bar{0})$	$\varphi_2(\bar{1})$	$\varphi_2(\bar{2})$	…	$\varphi_2(\bar{n})$		¬ $\boldsymbol{\varphi_2(\bar{2})}$
φ_n	$\varphi_n(\bar{0})$	$\varphi_n(\bar{1})$	$\varphi_n(\bar{2})$	…	$\varphi_n(\bar{n})$		¬ $\boldsymbol{\varphi_n(\bar{n})}$
	…					…	

Πίνακας 3 μέθοδος διαγωνοποίησης

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Μια συνεπής επαρκώς ισχυρή, αξιωματικοποιήσιμη και τυπική θεωρία T, δεν μπορεί να είναι πλήρης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόδειξη είναι συνέπεια των θεωρημάτων3 και 4.

Το θεώρημα αυτό σε αντίθεση με το πρώτο ΘΜΠ δεν αποδίδει κάποια ακριβή μη αποκρίσιμη πρόταση για την θεωρία T. Το πιο σημαντικό είναι ότι εξαρτάται από την έννοια της επαρκώς ισχυρής θεωρίας η οποία είναι εγγενώς προβληματική. Όσο ισχυρές και να είναι οι θεωρίες, όσο και αν επεκταθούν, παραμένοντας όμως αξιωματικά τυπικά συστήματα, είναι μη πλήρεις.

Κεφάλαιο 4. Οι Αριθμητικές Q, PA

4.1 Η αριθμητική Raphael Robinson (Q)

Η πιο ασθενής θεωρία αριθμητικής που αφορά την μη πληρότητα και τη μη αποκρισιμότητα είναι η Αριθμητική Raphael Robinson, που συμβολίζεται με **Q.**
Η γλώσσα της είναι η **L_A =<+,*,s,0>** περιέχει δηλαδή την πρόσθεση +, τον πολλαπλασιασμό *,την συνάρτηση διαδόχου s και το μηδέν. Επίσης χρησιμοποιεί τους ποσοδείκτες οι οποίοι έχουν εμβέλεια πάνω στους φυσικούς αριθμούς και δημιουργούν γενικεύσεις στα αξιώματα, τα οποία αναφέρονται παρακάτω:

Αξίωμα 1

$\forall x(0\neq sx)$, δηλαδή το μηδέν δεν είναι επόμενος κάποιου αριθμού.

Αξίωμα 2

$\forall x\forall y(sx=sy\rightarrow x=y)$, δηλαδή αν οι επόμενοι δύο αριθμών είναι ίσοι, οι δύο αυτοί αριθμοί είναι ίσοι.

Αξίωμα 3

$\forall x(x\neq 0\rightarrow\exists y(x =sy))$, είναι η ύπαρξη του επόμενου κάθε αριθμού διάφορου του 0.

Αξίωμα 4

$\forall x(x+0=x)$, δηλαδή η πρόσθεση ενός αριθμού με το μηδέν δίνει ως αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό.

Αξίωμα 5

$\forall x\forall y(x+sy=s(x+y))$, που είναι ο αναδρομικός ορισμός της πρόσθεσης με βάση τη συνάρτηση του επόμενου αριθμού.

Αξίωμα 6

$\forall x(x*0=0)$, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού με το μηδέν δίνει ως αποτέλεσμα 0.

Αξίωμα 7

$\forall x\forall y(x*sy=(x*y)+x)$, που είναι ο αναδρομικός ορισμός του πολλαπλασιασμού με βάση την πρόσθεση και τη συνάρτηση του επόμενου αριθμού.

Στην αριθμητική Q η **διάταξη** προσδιορίζεται από την πρόταση $\varphi =_{ορισμός} \exists v(v+x=y)$ και για κάθε m,n είναι:

$Q\vdash\exists v(v+\overline{m}=\overline{n})$ αν $m\leq n$ ενώ,

$Q\vdash\neg(\exists v(v+\overline{m}=\overline{n}))$, αν $m>n$

Μπορούμε δε να εκφράζουμε την πρόταση: όλοι/κάποιοι αριθμοί μικρότεροι ή ίσοι του κ έχουν την ιδιότητα φ, γράφοντας $(\forall\xi\leq\kappa)\varphi(\xi)$, $(\exists\xi\leq\kappa)\varphi(\xi)$ αντίστοιχα.

Το ενδιαφέρον με τη γλώσσα Q είναι ότι αποφασίζει, την κάθε πρόταση που είναι **ελεύθερη ποσοδεικτών**, δηλαδή $Q\vdash\varphi$, αν φ αληθής και $Q\nvdash\varphi$, αν η φ είναι ψευδής. Για παράδειγμα μπορεί να αποδείξει την $0+\bar{n}=\bar{n}$, αλλά δεν μπορεί να αποδείξει την αντίστοιχη γενικευμένη της πρόταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 $Q\nvdash\forall x(0+x=x)$ και $Q\nvdash\neg(\forall x(0+x=x))$, δηλαδή η Q είναι μη πλήρης.

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι η Q δεν αποδεικνύει την $\varphi=_{\text{ορισμός}}\forall x(0+x=x)$ σε ένα διαφορετικό μοντέλο της. Θεωρούμε ένα διαφορετικό μοντέλο όπου

α) το **0** είναι το μηδέν,

β) **s** είναι η συνάρτηση διαδοχής ,

γ) ⊕ είναι η «πρόσθεση» και

δ) οι αριθμοί α, β έχουν τις ιδιότητες :

$\mathbf{s}\alpha=\alpha$ και $\mathbf{s}\beta=\beta$ ενώ $\mathbf{s}\nu=s\nu$ $\forall\nu\neq\alpha$, $\forall\nu\neq\beta$

$\alpha\oplus\nu=\alpha$, $\beta\oplus\nu=\beta$, $\forall\nu\neq\alpha$, $\forall\nu\neq\beta$

$\nu\oplus\alpha=\beta$, $\nu\oplus\beta=\alpha$ $\forall\nu\neq\alpha$, $\forall\nu\neq\beta$

Είναι απλό να επαληθεύσουμε ότι τα αξιώματα 1 έως 5 είναι αληθή (τα αξιώματα 6,7είναι επίσης αληθή και απαιτούν λίγη παραπάνω προσπάθεια).

Όμως είναι $\mathbf{0}\oplus\alpha=\beta$, $\mathbf{0}\oplus\beta=\alpha$,οπότε

$Q\nvdash\forall x(\mathbf{0}\oplus x=\mathbf{0})$στην περίπτωση που το x είναι το α ή το β

Είναι λοιπόν $Q\nvdash\forall x(0+x=x)$ και προφανώς $Q\nvdash\neg(\forall x(0+x=x))$, οπότε η Q είναι μη πλήρης αριθμητική.

Η Q είναι ενδιαφέρουσα αριθμητική γιατί είναι η πλέον «αδύναμη» η οποία:

1. Είναι επαρκώς ισχυρή, αξιωματικοποιήσιμη τυπική αριθμητική και δεν μπορεί να είναι πλήρης. Η μη πληρότητά της μπορεί να αποδειχτεί και χωρίς τα επιχειρήματα του Gödel.

2. Μπορεί να καταγράψει όλες τις πρωτογενείς αναδρομικές ιδιότητες, που είναι μια σπουδαία υποκατηγορία των αποκρίσιμων ιδιοτήτων.
3. Περιέχει αυτό ακριβώς το ορισμένο ποσό αριθμητικής που χρειαζόμαστε.

4.2 Η αριθμητική Peano (PA)

Είδαμε ότι για κάθε συγκεκριμένο n ισχύει $Q\vdash\varphi(\bar{n})$, αλλά $Q\nvdash\forall x\varphi(x)$ Δηλαδή η Q αποδεικνύει τις $\varphi(\bar{0})$, $\varphi(\bar{1})$, $\varphi(\bar{2})$,.. $\varphi(\bar{n})$,…και θα θέλαμε την γενίκευσή τους, δηλαδή ότι για κάθε n αληθεύει η φ(x). Αυτό που ζητάμε είναι γνωστό ως **ω-κανόνας.** Αλλά το πρόβλημα είναι ότι υπάρχει άπειρο πλήθος υποθέσεων. Έτσι, οι αποδείξεις που επικαλούνται τον ω-κανόνα θα είναι άπειρες σειρές και δεν μπορούν να ελέγχονται μηχανιστικά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, όπως επιθυμούμε. Θα χρειαστούμε μια γλώσσα που θα χρησιμοποιεί μια νέα αρχή, που θα λύνει αυτό το πρόβλημα.

Ορισμός 20 Η **Αριθμητική Peano**, είναι μια πρώτης τάξης θεωρία με γλώσσα L_A, η οποία έχει τα αξιώματα της Q και επιπλέον όλες τις περιπτώσεις της αρχής επαγωγής, που μπορούν να κατασκευασθούν από ανοικτούς κδτ της L_A.

Στα τέλη του 19ου (1889) ο Giuseppe Peano ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε να θεμελιώσει τη θεωρία των φυσικών. Το σύστημα του δεν ήταν ακριβώς αυτό που σήμερα ονομάζουμε «πρωτοβάθμια Peano αριθμητική», αλλά η κύρια διαφορά βρίσκεται στο αξίωμα επαγωγής, επειδή ο Peano χρησιμοποίησε το δευτεροβάθμιο αξίωμα επαγωγής[21].

Στην Αριθμητική Peano είναι δυνατό να αποφασισθεί εάν οποιοσδήποτε δεδομένος κδτ έχει τη σωστή μορφή, ώστε να είναι ένα από τα νέα αξιώματα, έτσι η PA είναι μια θεμιτή τυπική θεωρία και επειδή είναι μια «πλούσια» αριθμητική αποτελεί ορόσημο στην αξιωματικοποιήσιμη βασική αριθμητική. Η PA αντικαθιστά τον ω-κανόνα με την αρχή της επαγωγής και μπορεί να αποφασίσει αποτελεσματικά αν ένας κδτ είναι ένα από τα άπειρα αξιώματά της. Επίσης μπορεί να αποφασίσει αν μια πεπερασμένη σειρά από κδτ συνιστούν μια απόδειξη στην PA. Και οι

[21] $\forall X(0 \in X \land \forall x(x \in X \rightarrow x+1 \in X)) \rightarrow \forall y(y \in X)$, η μεταβλητή είναι το που X διατρέχει σύνολα, ενώ η μεταβλητή x, διατρέχει αριθμούς. Το αξίωμα τότε είναι πολύ ισχυρό αλλά λογικά μη αποδεκτό.

δυνατότητες αυτές για αποκρισιμότητα είναι εφικτές αποτελεσματικά. Παρά τον άπειρο αριθμό αξιωμάτων της PA δεν υπάρχει πεπερασμένος αριθμός αξιωμάτων με το ίδιο συμπέρασμα. Δηλαδή κάθε ένα αξίωμα είναι διαφορετικό.

Οι γνωστές βασικές αλήθειες σχετικά με γενικευμένες αλήθειες σχετικά με τη διάδοχο συνάρτηση, τις πράξεις του πολλαπλασιασμού της πρόσθεσης και της διάταξης είναι αποδείξιμες από την PA χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγής, και αυτά τα θεωρήματα αποκλείουν κάθε πιθανό αποκλίνον μοντέλο. Η PA θα μπορούσε να πει κανείς ότι είναι πλήρης θεωρία που αποδεικνύει όλες τις αλήθειες σε αυτή.

Πριν την εργασία του Gödel ήταν γνωστό ότι αν από την PA αφαιρέσουμε τον πολλαπλασιασμό και κρατήσουμε την συνάρτηση s του διαδόχου και την πρόσθεση τότε προκύπτει μια τυπική αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που είναι πλήρης. Το αποτέλεσμα όμως των ΘΜΠ αποκαλύπτει ότι ενισχύοντας αυτή τη θεωρία με τον πολλαπλασιασμό ώστε να γίνει η «πλήρης» PA, καθιστά την PA μη πλήρη και μη πληρώσιμη. Δεν ήταν προφανώς προβλέψιμο ότι ο πολλαπλασιασμός κάνει αυτή τη διαφορά και η προσθήκη σε θεωρίες ισχυρές τουλάχιστον σαν την Q τις κάνει μη πλήρεις. Βέβαια, ο πολλαπλασιασμός από μόνος δεν είναι η αιτία της μη πληρότητας. Ο Peter Smith αναφέρει[21], ότι το 1929 ο Thoralf Skolem έδειξε ότι υπάρχει μια πλήρης θεωρία που χρησιμοποιεί κατάλληλη γλώσσα α' τάξης και αποδεικνύει όλες τις αληθείς ιδιότητές της, αλλά χωρίς την συνάρτηση s του διαδόχου και την πρόσθεση. Η συνύπαρξη των **s,+,*** είναι ικανή μεν να εκφράσει και να καταγράψει όλες τις πρωτογενείς αναδρομικές συναρτήσεις, αλλά καθιστά τη θεωρία μη πλήρη.

4.2.1 Η αρχή της αριθμητικής επαγωγής

Η λογική της αριθμητικής επαγωγής είναι ότι αν το μηδέν (ή άλλος διάδοχος αριθμός) έχει μια ιδιότητα η οποία περνά από τον ένα αριθμό στον επόμενο, τότε όλοι οι αριθμοί (μετά τον διάδοχο αριθμό) έχουν την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή σύμφωνα με την **αρχή επαγωγής** :

$(\varphi(0) \wedge (\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(sx)) \rightarrow \forall x(\varphi(x))$.

Μια αναλυτική εφαρμογή της αρχής επαγωγής που «διορθώνει» την αδυναμία της απόδειξης του θεωρήματος 6 είναι:

1. Υποθέτουμε την $\varphi(a)$
2. $0 + a = a$ (από το αξίωμα 4)
3. $s(0 + a) = sa$ (από το νόμο ταυτότητας και το βήμα 2)

4. (0 + sa) = s(0 + a) (από το αξίωμα 5)

5. (0 + sa) = sa (από τα βήματα 3, 4)

6. φ(sa) εφαρμόζοντας την υπόθεση

7. φ(a) →φ (sa) (συμπερασματικά από τα βήματα 1, 6)

8. ∀x(φ(x) →φ(sx)) (από το βήμα 7, αφού a ήταν τυχαίο)

Τώρα υποθέτοντας ότι $\varphi(\bar{0})$ αληθής και ότι ∀x(φ(x) →φ(sx)) τότε προκύπτει η $\varphi(\bar{0}) \rightarrow \varphi(\bar{1})$ και από τον κανόνα παραγωγής (modus ponens) προκύπτει η $\varphi(\bar{1})$. Όμοια η $\varphi(\bar{1}) \rightarrow \varphi(\bar{2})$ δίνει την $\varphi(\bar{2})$ και συνεχίζοντας παίρνουμε τελικά τις $\varphi(\bar{0})$, $\varphi(\bar{1})$, $\varphi(\bar{2})$,.. $\varphi(\bar{n})$,…

Παραπάνω με τη γλώσσα Q είχαμε δει ένα μοντέλο-ερμηνεία, η οποία έκανε τα αξιώματα της Q αλήθεια ενώ την πρόταση ∀x (0 + x = x) και την άρνησή της μη αποκρίσιμες. Τώρα θα δούμε μια πρόταση με τη σύντομη απόδειξή της, δια της οποίας φαίνεται πως η αρχή επαγωγής «ενισχύει» την Q.

Η PA αποδεικνύει την φ(x)= ∀x(x≠sx)

Πράγματι PA⊢φ(0) αφού αυτό προκύπτει από το πρώτο αξίωμα για x=0.

Η PA αποδεικνύει την ∀x(φ(x) → φ(sx)). Οπότε από την αρχή επαγωγής (φ(0) ∧ ∀x(φ(x) → φ(sx))) → ∀xφ(x). Άρα η PA αποδεικνύει την ∀x(x≠sx), δηλαδή κανείς αριθμός δεν έχει διάδοχο τον εαυτό του.

4.3 Οι προτάσεις Σ_1,Π_1

Η λογική μορφή μιας ιδιότητας επηρεάζει την πολυπλοκότητα του συνόλου που ορίζεται από την ιδιότητα αυτή, δηλαδή την αναδρομικότητα ή μη του συνόλου. **Θυμίζουμε ότι** μία εμφάνιση της μεταβλητής x σε ένα τύπο φ λέγεται **δεσμευμένη** αν είναι της μορφής (∀x)(· · · x · · ·) ή (∃x)(· · · x · · ·), οπότε και είναι δεσμευμένη μεταβλητή του φ. Κάθε άλλη εμφάνιση μεταβλητής στον φ λέγεται **ελεύθερη**. Κάθε τύπος φ λέγεται **πρόταση** αν δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

Η λογική πολυπλοκότητα ενός τύπου εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμό και την εναλλαγή των ποσοδεικτών που περιέχει, δηλαδή του αριθμού των ακολουθιών της μορφής ∃∀∃∀ · · · ή ∀∃∀∃ · · · που εμφανίζονται στον τύπο. Οι σύνδεσμοι δεν θεωρούνται ότι επηρεάζουν την πολυπλοκότητα, και έναν τύπο χωρίς ποσοδείκτες, όσο μεγάλο αριθμό συνδέσμων και να περιέχει, τον κατατάσσουμε στο κατώτερο σκαλοπάτι της πολυπλοκότητας. Αλλά και για τους ποσοδείκτες, μόνον οι μη φραγμένοι θεωρούνται ότι συμβάλλουν στην πολυπλοκότητα.

Ορισμός 21 Οι ποσοδείκτες $(\forall x)(\cdot\cdot\cdot)$, $(\exists x)(\cdot\cdot\cdot)$ λέγονται **φραγμένοι** αν είναι της μορφής $(\forall x)(x < y \rightarrow \psi)$ και $(\exists x)(x < y \wedge \psi)$, αντίστοιχα. Ένας τύπος φ λέγεται φραγμένος αν όλοι οι ποσοδείκτες του (αν έχει) είναι φραγμένοι.

Ορισμός 22 Ένας τύπος θα λέγεται $\boldsymbol{\Sigma_n}$ αν είναι της μορφής $(\exists x_1)(\forall x_2) \cdot\cdot\cdot (Ax_n)\varphi$, όπου ο φ είναι φραγμένος τύπος και έχουμε n εναλλαγές ποσοδεικτών (το A είναι ο καθολικός ποσοδείκτης αν n άρτιος διαφορετικά είναι ο υπαρκτικός). Επίσης ένας τύπος θα λέγεται $\boldsymbol{\Pi_n}$ αν είναι της μορφής $(\forall x_1)(\exists x_2) \cdot\cdot\cdot (Ax_n)\varphi$ (αν n άρτιος το A είναι ο υπαρκτικός ποσοδείκτης διαφορετικά είναι ο καθολικός).

Για παράδειγμα αν ο τύπος φ είναι φραγμένος, τότε ο τύπος $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)\varphi$ είναι Σ_2, ενώ ο τύπος $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)\varphi$ είναι Π_2.Ο παραπάνω χαρακτηρισμός των τύπων είναι καθαρά συντακτικός και βέβαια δεν εξαντλεί το σύνολο των τύπων. Για παράδειγμα αν ο φ είναι Σ_2 και ο ψ είναι Π_3 ο τύπος $\varphi\wedge\psi$, $\varphi \vee\psi$ δεν ανήκει σε καμιά από τις παραπάνω κλάσεις. Όμως ο τελευταίος, όπως και κάθε τύπος, είναι λογικά ισοδύναμος με κάποιον που ανήκει στις κλάσεις των Σ_n, Π_n. Στη Λογική οι τύποι είναι αντικείμενα ενός λογισμού που τους μετασχηματίζει διατηρώντας την «αλήθεια» τους με τη σχέση της λογικής ισοδυναμίας. Είναι όπως ακριβώς στην άλγεβρα όπου ο αλγεβρικός λογισμός μετασχηματίζει τους τύπους, διατηρώντας την ποσότητα με τη σχέση της ισότητας.

Δεχόμαστε τις παρακάτω προτάσεις χωρίς να αναφερθούν οι αποδείξεις

- **Η Q, άρα και η PA, μπορεί να αποδείξει κάθε αληθή Σ_1 πρόταση(είναι Σ_1-πλήρης)**
- **Αν η T είναι συνεπής θεωρία, που περιλαμβάνει την Q, τότε κάθε Π_1 πρόταση που αποδεικνύει είναι αληθής.**

4.4. Πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις

Είναι μια σπουδαία υποκατηγορία των αποτελεσματικά αποφασίσιμων συναρτήσεων, και αποφασίζουν αν υπάρχουν ιδιότητες ή σχέσεις μέσα σε μια θεωρία. Το παραγοντικό είναι ένα καλό παράδειγμα συνάρτησης που ορίζεται με αναδρομικό τρόπο. Είναι μια ιδιότητα μιας βασικής αριθμητικής που μπορεί να οριστεί στην L_A με τον παρακάτω τρόπο: **0!=1 και (sy)!=y!*sy,** θέτοντας στο y για παράδειγμα την τιμή 7 παίρνουμε 8!=7!*8 δηλαδή για να υπολογισθεί μπορούμε να πούμε ότι πρέπει να υπολογισθεί το 7! Και μετά ο πολλαπλασιασμός με το 8. Δηλαδή συντελείται μια σύνθεση πράξεων α) του παραγοντικού και β) του πολλαπλασιασμού.

Γενικεύοντας την περίπτωση του παραγοντικού μπορούμε να πούμε ότι η f ορίζεται αναδρομικά, όταν **f(0)=k και f(sy)= g(y, f(y)), ό**που k ένας αριθμός και g μια συνάρτηση.

Ορισμός 23 Το σύνολο των **αρχικών συναρτήσεων** ορίζεται από την διάδοχο συνάρτηση s, την Z(x)=0 και όλες τις κ-ταυτοτικές συναρτήσεις $I_i^{\kappa}(x_1, x_2, \ldots, x_\kappa)=x_i$ για κάθε κ και για κάθε i, με 1≤ i ≤κ. Για παράδειγμα η τριμελής ταυτοτική συνάρτηση είναι η $I_3^3(x_1, x_2, x_3)=x_3$, ενώ η $I_2^3(x_1, x_2, x_3)=x_2$

Ορισμός 24 Αν $\vec{x}$ συμβολίζει τη σειρά των μεταβλητών $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ και $f(\vec{x},0)=g(\vec{x})$ και $f(\vec{x},sy) = h(\vec{x},y,f(\vec{x},y))$
τότε η f ορίζεται από τις g, h με πρωταρχική αναδρομική σχέση .

Το σύνολο των **πρωταρχικών αναδρομικών (π.α.) συναρτήσεων** ορίζεται αποκλειστικά από τους παρακάτω κανόνες.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f και τις π.α. συναρτήσεις g, h.

(α) Οι συναρτήσεις s, Z , I_i^{κ} είναι π.α.

(β) Αν η f ορίζεται σαν σύνθεση των π.α. g, h, τότε η f είναι π.α. συνάρτηση

(γ) αν f είναι αναδρομική έκφραση (υπο την έννοια της σχέσης του παραπάνω ορισμού) ως προς τις π.α. g, h, τότε η f είναι π.α. συνάρτηση.

(δ) Αυτές είναι οι μόνες πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις.

Ουσιαστικά, θέλουμε να υπάρχει ένας αλγόριθμος που εφόσον υπολογίζει τις τιμές των πρωταρχικών αναδρομικών συναρτήσεων g, h, τότε να μπορούμε να υπολογίσουμε αλγοριθμικά και τις τιμές της f.

Ορισμός 25 Μια π.α. συνάρτηση f είναι μια σαφώς προσδιορισμένη ακολουθία συναρτήσεων f_1, f_2, f_3,…, $f_κ$, όπου κάθε μία από αυτές είναι αρχική συνάρτηση, ή ορίζεται με αναδρομή, ή σύνθεση από αυτή την ακολουθία και είναι $f_κ$=f.

Ακολουθεί μια σχετική πρόταση.

Θεωρούμε την ιδιότητα Π, τη συνάρτηση f και τις π.α. συναρτήσεις g, h και τις παρακάτω προτάσεις

Π1: οι αρχικές συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα Π.

Π2: Αν οι g, h έχουν την ιδιότητα Π και η f είναι σύνθεσή τους, τότε η f έχει επίσης την Π

Π3: Αν οι g, h έχουν την ιδιότητα Π και η f είναι αναδρομική ως προς τις g, *h*, τότε η f έχει επίσης την ιδιότητα Π.

Τότε οι τρείς παραπάνω προτάσεις αρκούν για να δείξουμε ότι όλες οι πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις, έχουν την ιδιότητα Π

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Διατρέχουμε τα στοιχεία της ακολουθίας συναρτήσεων f_1, f_2, f_3,…, $f_κ$ και αρχίζουμε με τις αρχικές συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Π, οπότε βάσει της Π1 έχουν την ιδιότητα Π. Κατόπιν κάθε διαδοχικό βήμα που γίνεται στην ακολουθία παράγει συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Π (λόγω των Π2,Π3), φθάνοντας στην τελική συνάρτηση $f_κ$=f.

Παραδείγματα αναδρομικών συναρτήσεων

α) Η πρόσθεση είναι π.α.

Έστω f(x, y) = x + y. Η f ορίζεται ως εξής: f(x, 0) = x=I_1^1 (x)

και f(x, y + 1) = f(x, y) + 1=s($I_3^3(x, y, f(x, y))$)

Βλέπουμε ότι η f παράγεται με βασική αναδρομή από τις g = I_1^1 και h = s ∘I_3^3. Η h είναι σύνθεση π.α., άρα π.α., και η g είναι π.α., άρα η πρόσθεση είναι π.α.

β) Ο πολλαπλασιασμός είναι π.α.

Έστω f(x, y) = x · y, τότε

f(x, 0) = 0 = Z(x)

f(x, y + 1) = f(x, y) + x =I_3^3(x, y, f(x, y)) + I_1^3 (x, y, f(x, y)) = ($I_3^3 + I_1^3$)(x, y, f(x, y)).

Εδώ έχουμε g = Z και h = I_3^3 + I_1^3 που είναι σύνθεση των I_3^3, I_1^3 και +, που ειναι π.α.

γ) Η f(x) = x! είναι π.α.

Η f ορίζεται ως εξής:

f(0) = 1,

f(sy) = f(y) · sy .

Το σχήμα αυτό προκύπτει από το σχήμα βασικής αναδρομής,

Για την h:h(y, f(y)) = f(sy) = f(y) · sy, όμως

f(y) · sy = I_2^2 (y, f(y)) · s(I_1^2 (y, f(y))), δηλαδή h = $I_2^2 \circ sI_1^2$.

4.5 Οι πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι υπολογίσιμες (αλγοριθμικές).

Η γενική στρατηγική για να δείξει κάποιος ότι π.α. συναρτήσεις είναι μηχανιστικά υπολογίσιμες είναι: Πρώτα ισχυριζόμαστε ότι οι αρχικές συναρτήσεις είναι υπολογίσιμες, το οποίο είναι τετριμμένο ότι ισχύει αφού οι π.α. συναρτήσεις s, Z , I_i^κ είναι αποτελεσματικά υπολογίσιμες με ένα απλό αλγόριθμο. Δεύτερον, αν οι g, h είναι υπολογίσιμες και η f είναι υπολογίσιμη ως σύνθεσή τους, το οποίο επίσης ισχύει, αν πάρουμε την έξοδο της αλγοριθμικής ρουτίνας που αφορά την συνάρτηση g, και την τροφοδοτήσουμε ως είσοδο στον αλγόριθμο που αφορά την συνάρτηση h. Τρίτον, αν οι g, h είναι υπολογίσιμες και η f είναι αναδρομική ως προς αυτές, τότε η f είναι υπολογίσιμη. Πράγματι έστω θέλουμε τον υπολογισμό της αναδρομής: f(0)=k, f(sy)= g(y, f(y)). Κατασκευάζουμε ένα αλγόριθμο με την εξής δομή επανάληψης:

function←k

ΓΙΑ y από 0 μέχρι n-1 ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ

function ←g(y, function)

ΤΕΛΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Η λειτουργία του αλγόριθμου έχει ως εξής: Στη μεταβλητή function εκχωρείται η αρχική τιμή k. Το y παίρνει την τιμή 0, υπολογίζεται η g(0, k), Το y παίρνει την τιμή 1, υπολογίζεται η g(1, g(0, k)) η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς μέχρι το y να πάρει την τιμή n-1, με βήμα μεταβολής ένα, οπότε στη μεταβλητή function εκχωρείται η τελευταία τιμή της (για παράδειγμα η n! αν είχαμε την περίπτωση της αναδρομικής συνάρτησης του παραγοντικού).

Έτσι όλες οι πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι αποτελεσματικά υπολογίσιμες υλοποιώντας μια αλγοριθμική δομή επανάληψης τύπου: «ΓΙΑ-ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ». **Αλλά ισχύει και αντίστροφα,** αν μια συνάρτηση μπορεί να υπολογισθεί από ένα αλγόριθμο που χρησιμοποιεί μια δομή επανάληψης «ΓΙΑ-ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ», στον βρόχο της οποίας χρησιμοποιούμε πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις, τότε και η ίδια η συνάρτηση είναι π.α. συνάρτηση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Υπάρχουν υπολογίσιμες αριθμητικές συναρτήσεις που δεν είναι πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση ορίζεται ως αναδρομή ή σύνθεση άλλων συναρτήσεων που επίσης ορίζονται ως αναδρομή ή σύνθεση άλλων συναρτήσεων, μέχρι τελικά να φτάσουμε σε εκείνες που ορίζονται από κάποιες αρχικές, που είναι π.α. συναρτήσεις. Οπότε μπορεί να βρεθεί ένας τρόπος απαρίθμησης όλων των π.α. συναρτήσεωνf_0, f_1, f_2,…

	0	1	2	3		**δ**
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	…	$f_0(0)+1$
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	…	$f_1(1)+1$
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	…	$f_2(2)+1$
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(3)$	$f_3(3)$	…	$f_3(3)+1$
…	…	…	…	…	↘	

Πίνακας 4 μέθοδος διαγωνοποίησης των π.α. συναρτήσεων

Εύκολα μπορούμε να δημιουργήσουμε τον διπλανό πίνακα όπου σε κάθε γραμμή f_n αντιστοιχούμε τις τιμές-επιχειρήματα για n=0,1,2,3,…Ορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις **$\delta(n)= f_n(n)+1$** που είναι αποτελεσματικά υπολογίσιμες αφού υπολογίζονται από την αντίστοιχη f_n συν το ένα. Αν τώρα υποθέσουμε ότι η δ είναι βασική αναδρομική συνάρτηση, τότε θα είναι κάποια από τον προηγούμενο πίνακα. Έστω είναι η f_k οπότε $\delta(k)= f_k(k)$, όμως από τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, είναι $\delta(k)= f_k(k)+1$.
Άτοπο!

Αυτός ο τρόπος διαγωνοποίησης φυσικά έχει σχέση με τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Cantor για να αποδείξει ότι το σύνολο των πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμο, αλλά και με την διαγωνοποίηση που χρησιμοποίησε ο Gödel και είδαμε στην σκιαγράφηση του 1ου ΘΜΠ. Οι συναρτήσεις δ που χρησιμοποιήθηκαν έχουν άμεση σχέση με την κύρια διαγώνιο του πίνακα και αποτελούν την αντιδιαγώνιο που την καταγράφουμε σαν τελευταία στήλη του πίνακα.

Υπάρχουν και συναρτήσεις μερικά υπολογίσιμες φ_i (δεν ορίζεται η $\varphi_i(n)$ για κάθε n) αλλά επικαλούμαστε το ίδιο επιχείρημα της διαγωνοποίησης για να πούμε ότι δεν υπάρχει τρόπος απαρίθμησης των μερικά υπολογίσιμων αριθμητικών συναρτήσεων. Γενικά δεν υπάρχει αποτελεσματική απαρίθμηση αλγορίθμων για πλήρως υπολογίσιμες συναρτήσεις.

4.6. Ορίζοντας πρωταρχικές αναδρομικές ιδιότητες και σχέσεις.

Ορισμός 26 Χαρακτηριστική συνάρτηση της αριθμητικής ιδιότητας P λέγεται η μονότιμη συνάρτηση $\mathbf{c_P}$**,** ώστε αν η m έχει την ιδιότητα P τότε $\mathbf{c_P(m)=0}$ ενώ αν η m δεν έχει την ιδιότητα P τότε $\mathbf{c_P(m)=1}$**.**

Με ίδιο τρόπο χαρακτηριστική συνάρτηση της διμελούς αριθμητικής σχέσης R λέγεται η διμελής συνάρτηση $\mathbf{c_R}$ ώστε αν η m έχει την σχέση P με την n τότε $c_R(m,n)=0$ ενώ αν η m δεν έχει την σχέση R με την n τότε $c_R(m, n)=1$.
Παρόμοια μπορούν να οριστούν οι n-μελείς αριθμητικές σχέσεις.

Η αριθμητική ιδιότητα P (ή σχέση R) χωρίζει το σύνολο των αριθμών (ζευγών) σε δύο σύνολα, σε αυτά που έχουν την ιδιότητα και σε αυτά που δεν την έχουν. Επίσης η χαρακτηριστική συνάρτηση χωρίζει το σύνολο των αριθμών σε δύο σύνολα, ένα για αριθμούς που τους αντιστοιχεί στο 0, όταν έχουν την ιδιότητα P (ή σχέση R) και το άλλο για αριθμούς που τους αντιστοιχεί στο 1, όταν δεν έχουν την ιδιότητα P (ή σχέση R). Υπό μια έννοια η αριθμητική ιδιότητα P και η χαρακτηριστική συνάρτηση c_P, παρέχουν «την ίδια πληροφορία», για τα δύο σύνολα, οπότε: Η αποκρισιμότητα μιας ιδιότητας (ή μιας σχέσης) μεταξύ αριθμών, αντιστοιχεί στην πρωταρχική αναδρομικότητά της χαρακτηριστικής συνάρτησής της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 Η γλώσσα L_A μπορεί να εκφράσει όλες τις π.α. συναρτήσεις

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δείχνουμε τις δύο από τις παρακάτω προτάσεις

Π1: η L_A εκφράζει τις αρχικές συναρτήσεις του ορισμού 23.

Πράγματι έχουμε τον κδτ sx = y για την διάδοχο συνάρτηση,

τον κδτ $Z(x, y) =_{\text{Ορισμός}} (x = x \land y = 0)$ που εκφράζει την $Z(x)=0$, τους κδτ I_1^3=(x,y,z,u) =$_{\text{Ορισμός}}$(x = u ∧y = y ∧ z = z), I_2^3=(x,y,z,u) =$_{\text{Ορισμός}}$(x = x ∧y = u ∧ z = z) και I_3^3=(x,y,z,u) =$_{\text{Ορισμός}}$(x = x ∧y = y ∧ z = u) για τις 3-μελείς ταυτοτικές συναρτήσεις

Π2: Αν η L_A εκφράζει τις g, h και η f ορίζεται ως σύνθεσή τους, τότε η L_A εκφράζει και την f.

Αν οι μονομελείς g, h εκφράζονται από τους κδτ G(x,y) και H(x,y), τότε η σύνθεσή τους f(x)= h(g(x)) εκφράζεται από τον Σ_1 κδτ ∃z(G(x,z) ∧ H(z, y)). Αν g(m) = k και h(k) = n, τότε f(m) = n. Αν τώρα οι G($\overline{\mathrm{m}}$, $\overline{\mathrm{k}}$) και H($\overline{\mathrm{k}}$, $\overline{\mathrm{n}}$) είναι αληθείς τότε και ο κδτ ∃z(G($\overline{\mathrm{m}}$,z) ∧ H(z, $\overline{\mathrm{n}}$)). είναι αληθής για κάποιο k. Οπότε f(m)= h(g(m))= h(k) = n.

Π3: Αν η L_A εκφράζει τις g, h και η f ορίζεται ως βασική αναδρομή από αυτές, τότε η L_A εκφράζει και την f. Επειδή οι συναρτήσεις G(x,y) ,H(x,y) είναι Σ_1 κδτ τότε η γλώσσα L_A μπορεί να εκφράσει κάθε βασική αναδρομική συνάρτηση f με ένα Σ_1 κδτ.

4.7. Η Q μπορεί να καταγράψει (συλλάβει) όλες τις πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις

Τώρα θέλουμε όχι μόνο να εκφράσουμε τις πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις αλλά και να τις συλλάβουμε.

Ορισμός 27 Η θεωρία T συλλαμβάνει μια διμελή σχέση R από τον ανοιχτό κδτ ψ(x,y) ανν για κάθε m,n:

i) αν R είναι μια σχέση των m,n τότε T⊢ψ$(\overline{m},\overline{n})$

ii) αν R δεν είναι μια σχέση των m,n τότε T⊢¬ψ$(\overline{m},\overline{n})$

Ορισμός 28 Η θεωρία T καταγράφει μια συνάρτηση f από τον ανοιχτό κδτ χ(x,y) ανν για κάθε m,n

i) αν f(m)=n τότε T⊢χ$(\overline{m},\overline{n})$

ii) αν f (m)≠ n τότε T⊢¬χ$(\overline{m},\overline{n})$ και επιπλέον

iii) T⊢∃!y χ$(\overline{m},y)$

Η Q και κάθε ισχυρότερη θεωρία μπορεί να καταγράψει όλες τις π.α. συναρτήσεις με ένα Σ_1 κδτ

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 Η L_A μπορεί να εκφράσει όλες τις π.α. αποφασίσιμες ιδιότητες και σχέσεις

Απόδειξη

Έστω η P είναι π.α. ιδιότητα τότε και η c_P είναι επίσης π.α. ιδιότητα. Επειδή η L_A μπορεί να εκφράσει όλες τις π.α. συναρτήσεις τότε μπορεί να εκφράσει και την c_P με τον ανοικτό κδτ $c_P(x,y)$. Αν ο m έχει την ιδιότητα P δηλαδή $c_P(m)=0$ τότε η $c_P(\overline{m},0)$ είναι αληθής. Αν ο m δεν έχει την ιδιότητα P δηλαδή $c_P(m)\neq 0$ τότε η $c_P(\overline{m},0)$ δεν είναι αληθής. Έτσι ο κδτ $c_P(x,0)$ εκφράζει την αποφασίσιμη π.α. ιδιότητα P.

Θεώρημα 10 Η Q μπορεί να καταγράψει όλες τις π.α. ιδιότητες και σχέσεις.

Απόδειξη

Έστω η P είναι βασική αναδρομική ιδιότητα τότε και η c_P είναι επίσης π.α. Επειδή η Q μπορεί να καταγράψει όλες τις π.α. συναρτήσεις με ένα Σ_1 τύπο, τότε μπορεί να καταγράψει και την c_P με τον ανοικτό κδτ $c_P(x,y)$. Έτσι αν ο m έχει την ιδιότητα P δηλαδή $c_P(m)=0$ τότε η $Q\vdash c_P(\overline{m},0)$. Αν 0 m δεν έχει την ιδιότητα P δηλαδή $c_P(m)\neq 0$ τότε $Q\vdash \neg c_P(\overline{m},0)$. Έτσι ο κδτ $c_P(x,0)$ μπορεί να καταγράψει την βασική αναδρομική ιδιότητα P στην Q.

Κεφάλαιο 5. Η τυπική απόδειξη των ΘΜΠ

5.1 Η αρίθμηση του Godel

Στη σημερινή εποχή είναι κοινότοπο ότι κάθε δεδομένο μπορεί να ψηφιοποιηθεί, δηλαδή να αναπαρασταθεί με ένα δυαδικό αριθμό που θα το χειριστεί ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής. Όμως αυτό δεν ήταν τόσο απλή ιδέα, στα τέλη του 1920, αλλά αντίθετα φαινόταν πρωτόγνωρο και επαναστατικό.

Η διορατικότητα του Hilbert ήταν να θεωρήσει τα συντακτικά αντικείμενα που περιέχονται στις τυπικές θεωρίες, ως πεπερασμένα μαθηματικά, ελπίζοντας ότι μέσω των τελευταίων θα μπορούσε να μιλήσει για τις ιδιότητες αυτών των θεωριών. Η ουσιώδης συνεισφορά του Gödel ήταν ότι αντιστοίχισε σε αυτά τα πεπερασμένα αντικείμενα αριθμητικούς κώδικες, έτσι ώστε οι αριθμητικές ιδιότητες των κωδίκων, να εκφράζουν και να ανιχνεύουν λογικές (συντακτικές) ιδιότητες της θεωρίας.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να αναπαρασταθούν οι εκφράσεις μιας τυπικής γλώσσας με το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή να γίνει μια κωδικοποίηση. Μία από αυτές τις κωδικοποιήσεις είναι γνωστή ως αρίθμηση του Gödel , την οποία θα δούμε με εκφράσεις της γλώσσας L_A , το οποίο λειτουργεί βέβαια για οποιαδήποτε τυπική γλώσσα. Στον παρακάτω πίνακα, δίδεται μια παραλλαγή της αρίθμησης Gödel, αντιστοιχούμε στα σύμβολα της γλώσσα L_A περιττούς αριθμούς. Επιπλέον υπάρχουν μεταβλητές, που κωδικοποιούνται με άρτιους αριθμούς.

¬	∧	∨	→	↔	∀	∃	=	(	)	0	s	+	*	x	y	z…
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	2	4	6…

Ορισμός 29 Έστω μια έκφραση που αποτελείται από κ+1 σύμβολα $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_\kappa$ με αντίστοιχους **κωδικούς αριθμούς Gödel (Gn)** $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_\kappa$ τότε ο Gn της έκφρασης είναι το γινόμενο:

$2^{g0}.3^{g1}.5^{g2}.7^{g3}\ldots\pi_\kappa^{g\kappa}$, όπου π_κ ο κ+1-πρώτος αριθμός.

Για παράδειγμα ο αριθμός ss0 έχει Gn: $2^{23}.3^{23}.5^{21}$, ενώ

ο κδτ ∃y (s0 + y) = ss0 έχει Gn: $2^{13}.3^{4}.5^{17}.7^{23}.11^{21}.13^{25}.17^{4}.19^{19}.23^{15}.29^{23}.31^{23}.37^{21}$.

Δοθέντος τώρα ενός αριθμού, για την αποκωδικοποίηση του πρέπει να γίνει υπολογισμός των γινομένων που βέβαια απαιτεί χρόνο αλλά είναι μια απλή υπολογιστική ρουτίνα. Το μεγάλο βέβαια πλεονέκτημα είναι ότι βασίζεται στο **θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής, δηλαδή ότι κάθε αριθμός αναλύεται κατά μοναδικό[22] τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

Για να εξετάσουμε την κωδικοποίηση μιας απόδειξης, εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το αξιωματικό σύστημα της θεωρία του Hilbert. Σε αυτή τη θεωρία οι αποδείξεις θεωρούνται σα μια απλή συστοιχία από κδτ και η κωδικοποίηση γίνεται με ειδικούς αριθμούς.

Ορισμός 30 Έστω μια έκφραση που αποτελείται από κ+1 σύμβολα Αν ε_0,ε_1, ε_2,… ,ε_n είναι μια ακολουθία κδτ ή εκφράσεων με αντίστοιχους κωδικούς αριθμούς Gödel c_0,c_1, c_2,… ,c_n τότε ο Gn αυτής της ακολουθίας είναι το γινόμενο:
$2^{c0}.3^{c1}.5^{c2}.7^{c3}\ldots\pi_n^{cn}$, όπου π_n ο n+1-πρώτος αριθμός.

Δοθέντος ενός αριθμού για την αποκωδικοποίηση απαιτούνται δύο στάδια. Πρώτα αναλύουμε τον αριθμό σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών. Προφανώς οι εκθέτες του θα είναι ειδικοί αριθμοί Gödel και όχι οι αριθμοί του προηγούμενου πίνακα κωδικοποίησης. Κατόπιν τον κάθε εκθέτη τον αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και έτσι προκύπτουν οι αντίστοιχες εκφράσεις.

5.2. Η αριθμητικοποίηση ιδιοτήτων, σχέσεων.

Ορισμός 31 Αν n είναι ένας αριθμός που κωδικοποιεί αντίστοιχα, έναν όρο, ένα κδτ, μια κλειστή πρόταση της L_A τότε αυτό δηλώνεται αντίστοιχα με τις ιδιότητες *Term(n), Wff(n), Sent(n).*

---

[22] Η μοναδικότητα της αντιστοίχισης, δύναται να χρησιμοποιηθεί και σε άλλους τομείς των μαθηματικών. Στο βιβλίο του Eves [13] αναφέρεται ένας ωραίος τρόπος «ένα προς ένα» αντιστοίχησης των ρητών αριθμών με φυσικούς, βασισμένη στην ιδέα κωδικοποίησης του Gödel: $(-1)^n p/q \leftrightarrow 2^n\ 3^p\ 5^q$,όπου n, p, q φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, ο –3/4 αντιστοιχεί στον $2^1 3^3 5^4$ = 33750. Αυτό βέβαια είναι ένας άλλος τρόπος απόδειξης ότι το σύνολο των ρητών έχει την ίδια πληθικότητα με αυτό των φυσικών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 Οι ιδιότητες *Term(n), Wff(n), Sent(n)* είναι π.α. αποφασίσιμες ιδιότητες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να προσδιοριστεί η ιδιότητα Term(n), προχωρούμε ως εξής: α) Στο πρώτο στάδιο αποκωδικοποιούμε τον n με μια μηχανιστική ρουτίνα και εξετάζουμε αν είναι όρος. Δηλαδή αν είναι «0» ή μια μεταβλητή, ή αν χτίζεται από το 0 και με βοήθεια μεταβλητής ή των λογικών συνδέσμων «και», «η» ή της συνάρτησης του διαδόχου και των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Αυτό αλγοριθμικά είναι αποφασίσιμο. Μια απλή συνάρτηση για το μήκος του n θα οριοθετεί την αποκωδικοποίηση του. β) Στο δεύτερο στάδιο του υπολογισμού η συνάρτηση αποφασίζει αν η αποκωδικοποιημένη έκφραση (εφόσον υπάρχει) είναι ένας όρος. Και στα δύο στάδια, ένα πρόγραμμα χρησιμοποιεί πεπερασμένο αριθμό βρόχων. Έτσι οι αριθμητικές ιδιότητες και οι σχέσεις είναι αποφασίσιμες και λειτουργούν ως πρωταρχικές αναδρομικές.

Παρόμοια και για τις Wff(n), Sent(n) αποκωδικοποιώντας το n, αποφασίζεται αλγοριθμικά το είδος τους, βάσει του μεγέθους του n και επειδή ο αλγόριθμος βασίζεται στη διαδικασία των βρόχων, οι ιδιότητες γίνονται βασικές αναδρομικές.

Ορισμός 32 Η σχέση *Prf(m,n)* χρησιμοποιεί τον αριθμό m για να κωδικοποιήσει αν μια πρόταση με κωδικό αριθμό n είναι απόδειξη στην PA

ΘΕΩΡΗΜΑ 12 Η σχέση *Prf(m,n)* είναι π.α. ιδιότητα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποκωδικοποιούμε διπλά τον αριθμό m. Πρώτα αποφασίζουμε αν είναι μια ακολουθία από κδτ στη θεωρία PA. Στη συνέχεια αποφασίζουμε αν ο m είναι μια κατάλληλα κατασκευασμένη απόδειξη, εξετάζοντας αν κάθε κδτ είναι ένα από τα αξιώματα ή άμεση συνέπεια από προηγούμενους κδτ με έναν από τους κανόνες απόδειξης της PA. Αν η πρόταση είναι απόδειξη τότε αποφασίζουμε αν ο τελικός κδτ έχει τον κωδικό αριθμό n. Στο τέλος ελέγχουμε αν η σχέση *Prf (m,n)* είναι αληθής. Έτσι υπάρχει μια υπολογιστική διαδικασία βασισμένη σε μη ατέρμονες βρόχους που κάνει την ιδιότητα αληθή, επομένως είναι π.α. ιδιότητα.

Ορισμός 33 Ένα σχήμα κωδικοποίησης S για τη γλώσσα L_A που αντιστοιχεί σε αριθμούς είναι αποδεκτό ανν α) υπάρχει μια π.α. ιδιότητα ***tr*** που μεταφράζει εκφράσεις σε κωδικούς αριθμούς σύμφωνα με τον Gödel-κώδικα και β) υπάρχει μια ακόμα π.α. ιδιότητα ***tr*** $^{-1}$ η οποία αντιστοιχεί αντίστροφα τους κωδικούς αριθμούς σε εκφράσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 Μια ιδιότητα σαν την *Term* που ορίζεται χρησιμοποιώντας το Gödel-κώδικα είναι π.α. ιδιότητα ανν η αντίστοιχη ιδιότητα $Term_S$ που ορίζεται χρησιμοποιώντας το κωδικό σχήμα S είναι π.α. για κάθε αποδεκτό σχήμα S

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των *Term*, $Term_S$ είναι *term*, $term_S$ αντίστοιχα. Τότε $term_S(n)= term(tr(n))$, οπότε η ιδιότητα $term_S$ είναι π.α., λόγω σύνθεσης εφόσον η term είναι π.α. Όμοια $term(n)= term_S\ (tr^{-1}(n))$ και η ιδιότητα term είναι π.α., αν επίσης η $term_S$ είναι π.α. Έτσι η *Term* είναι π.α. αν είναι και η $Term_S$. Έτσι, το αν η ιδιότητα είναι π.α. δεν εξαρτάται από κάποιο αποδεκτό κωδικό σχήμα. Παρόμοια για την ιδιότητα *Prf.*

Ορισμός 34 Αν η φ είναι μια L-έκφραση, τότε θα χρησιμοποιούμε το $\lceil \boldsymbol{\varphi} \rceil$ για να συμβολίσουμε τον Gn κωδικό αριθμό της.

Για παράδειγμα η L-έκφραση για τον καθιερωμένο αριθμό 1 της αριθμητικής είναι «s0» ή και $\overline{1}$, ενώ $\lceil S0 \rceil$, είναι ο αντίστοιχος αριθμός Gödel που ισούται με 2^{23} . 3^{21} Με τη σειρά του ο καθιερωμένος αριθμός $\lceil S0 \rceil = 2^{23}$. 3^{21} αντιστοιχεί στην L-έκφραση «$\lceil S0 \rceil$» ή «ss…s0» (που είναι μια έκφραση με 2^{21} . 3^{21} διαδοχικά s) και θα έχει επίσης ένα κωδικό αριθμό Gödel $\lceil \lceil S0 \rceil \rceil$, τον οποίο θα συμβολίζουμε $\overline{\lceil S0 \rceil}$

Υπάρχει λοιπόν μια διπλή χρήση , μία έξω από την τυπική γλώσσα για να συμβολίσουμε τον αριθμό Gödel, $\lceil S0 \rceil$ και μία $\overline{\lceil S0 \rceil}$ μέσα στην τυπική γλώσσα που παίρνει τη θέση ενός καθιερωμένου αριθμού της αριθμητικής, για αυτόν τον αριθμό.

Ορισμός 35 Η **διαγωνοποίηση** του κδτ φ(x) είναι η $\varphi(\overline{\lceil \varphi \rceil})$, όπου με $\lceil \varphi \rceil$ συμβολίζουμε τον αριθμό Gödel του κδτ φ(x) και με $\overline{\lceil \varphi \rceil}$ την έκφρασή του στην τυπική γλώσσα.

Δηλαδή στη θέση της ελεύθερης μεταβλητής βάζουμε τον αριθμό Gödel της φ. Με τη διαγωνοποίηση παίρνουμε τον αριθμό Gödel ενός κδτ με μια ελεύθερη μεταβλητή και εξετάζουμε αν βρίσκεται στη λίστα των αριθμών Gödel των κδτ της L_A (ή κάθε κατάλληλης γλώσσας).

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 Υπάρχει συνάρτηση **diag(n),** που είναι π.α. και για κάθε αριθμό Gödel n=$\lceil\varphi\rceil$ του κδτ φ με μια ελεύθερη μεταβλητή x στην L_A, αποδίδει τον αριθμό Gödel της διαγωνοποίησης του κδτ φ, αλλιώς επιστρέφει τον n.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για τον n αναζητούμε την αποκωδικοποίησή του. Αν δεν αντιστοιχεί σε μεταβλητή με μια ελεύθερη μεταβλητή τότε η συνάρτηση επιστρέφει n, διαφορετικά επιστρέφει τον φ($\bar{n}$) που είναι η διαγωνοποίηση του φ. Τότε γίνεται επεξεργασία του n για να υπολογιστεί η diag(n). Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει πεπερασμένες αναζητήσεις χρησιμοποιώντας επαναλήψεις, οπότε είναι π.α.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15 Ο κδτ **Diag(x)**=$\lceil(\exists x)(x = \lceil\varphi\rceil \wedge \varphi)\rceil$καταγράφει την σχέση diag στην γλώσσα Q.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι φανερό αφού η Q καταγράφει κάθε π.α. συνάρτηση

5.3 Κατασκευάζοντας την πρόταση Gödel

Ορισμός 36 Η σχέση *Gdl(m,n)* ορίζεται ως *Prf(m, diag(n)),* δηλαδή ο m είναι ο ειδικός κωδικός αριθμός Gödel , της απόδειξης της διαγωνοποίησης του κδτ με κωδικό αριθμό το n.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 Η *Gdl(m,n)* είναι π.α. αποφασίσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της *Gdl(m,n)* είναι σύνθεση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της *Prf* και της συνάρτησης *diag(n)* που είναι π.α.

Ορισμός 37 **Η Gdl**(x,y) εκφράζεται από Σ_1 κδτ οι οποίοι καταγράφουν την *Gdl*

Αρχίζουμε την κατασκευή της πρότασης Gödel .

Ορισμός 38 Ορίζουμε την **U(y) =$_{\text{ορισμός}}$∀x¬Gdl(x, y).**

Κατασκευάζουμε την πρόταση Gödel διαγωνοποιώντας την U, και της δίνουμε το όνομα G.

Ορισμός 39 Ορίζουμε την G=$_{\text{ορισμός}}$ U($\overline{\lceil U \rceil}$)= ∀x¬Gdl(x, ($\overline{\lceil U \rceil}$)).

ΘΕΩΡΗΜΑ 17 Η G είναι αληθής ανν είναι μη αποδείξιμη στην PA

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον ορισμό της η G είναι αληθής ανν για όλους τους m αριθμούς δεν ισχύει Gdl(m, $\lceil U \rceil$). Δηλαδή η G είναι αληθής ανν δεν υπάρχει m αριθμός, ώστε να είναι ο κωδικός για μια PA-απόδειξη της διαγωνοποίησης του κδτ με αριθμό Gödel $\lceil U \rceil$, ο οποίος είναι η διαγωνοποίηση της πρότασης G. Έτσι η G είναι αληθής, ανν δεν υπάρχει αριθμός m που να είναι κωδικός μιας απόδειξης, της πρότασης G στην PA. Αλλά αν η G είναι αποδείξιμη τότε κάποιος αριθμός μπορεί να είναι ο κωδικός από την απόδειξή της. Επομένως η G είναι αληθής, ανν είναι μη αποδείξιμη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18 Η G είναι πρόταση τύπου Π_1

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η Gdl(x, y) είναι Σ_1, οπότε και η Gdl(x, ($\overline{\lceil U \rceil}$)) είναι Σ_1, άρα η άρνηση ¬ Gdl(x,($\overline{\lceil U \rceil}$)) είναι Π_1. Ως εκ τούτου και η ∀x ¬ Gdl(x, ($\overline{\lceil U \rceil}$)) είναι Π_1.

5.3 Από την ορθότητα στην συνέπεια

ΘΕΩΡΗΜΑ 19 Αν η PA είναι ορθή τότε υπάρχει μια Π_1 πρόταση G ώστε PA$\nvdash$ G και PA$\nvdash$ ¬G, οπότε η PA δεν είναι πλήρης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η PA είναι ορθή, τότε δεν αποδεικνύει αναλήθειες.

Έστω η G που είναι αληθής ανν είναι μη αποδείξιμη στην PA.

Αν η G μπορεί να αποδειχθεί στην PA, τότε η PA αποδεικνύει αναλήθειες, άτοπο.

Άρα η G δεν αποδεικνύεται στην PA. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι η G είναι αληθής, οπότε η ¬G είναι ψευδής και αυτό σημαίνει, ότι η ¬G δεν μπορεί να αποδειχτεί στην PA.

Είχαμε δει στην σκιαγράφηση των ΘΜΠ μια εκδοχή του πρώτου ΘΜΠ, η οποία αφορούσε αποτελεσματικά αξιωματικοποιήσιμη θεωρία και δεν μας έδινε καθόλου πληροφορίες για το είδος της πρότασης G_T.

Μια θεωρία T είναι π.α. αξιωματικοποιήσιμη όταν η σχέση $Prf_T(m,n)$ είναι π.α.. Αν η γλώσσα της T περιλαμβάνει τη γλώσσα της βασική αριθμητικής, η L (παράγραφος 3.1.) άρα και η T σχηματίζουν αριθμητικά, και τότε ορίζουμε παρόμοια την $Gdl_T(m,n)$ που είναι π.α. και καταγράφεται από τον Σ_1 κδτ $\mathbf{Gdl_T}$. Η πρόταση G_T κατασκευάζεται στην T, όπως και στην PA, οπότε προχωρούμε στην διατύπωση της **σημασιολογικής εκδοχής του 1ου ΘΜΠ:**

ΘΕΩΡΗΜΑ 20 Αν η T είναι ορθή π.α. αξιωματικοποιημένη θεωρία της οποίας η γλώσσα περιλαμβάνει την βασική αριθμητική, τότε υπάρχει μια Π_1 πρόταση G_T ώστε $T \nvdash G_T$ και $T \nvdash \neg G_T$, οπότε η T δεν είναι πλήρης.

Το παραπάνω θεώρημα σε σχέση με το αρχικό θεώρημα 1 , είναι πιο ισχυρό γιατί μας δίνει πληροφορίες για την πρόταση G_T που είναι μια αποφασίσιμη ιδιότητα, με μια καθολική χρήση ποσοδείκτη, επίσης η G_T είναι μια Π_1 πρόταση με πολύ μικρή πολυπλοκότητα ποσοδεικτών. Από την άποψη της πολυπλοκότητας του ποσοδείκτη, είναι στο ίδιο επίπεδο με την εικασία του Goldbach: *"Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος από 2 είναι το άθροισμα δύο πρώτων",* που δεν έχει ακόμη ούτε αποδειχθεί ούτε διαψευσθεί. Είναι μεν αποφασίσιμο αν ένας άρτιος αριθμός είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, αλλά δεν είναι αποφασίσιμο ότι αυτό συμβαίνει για όλους τους άρτιους, έτσι θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η πρόταση G_T είναι τύπου Goldbach.

Το παραπάνω θεώρημα είναι και ουσιωδώς μη «πληρώσιμο». Αν επιχειρήσουμε να προσθέσουμε στην T την πρόταση G_T ως αξίωμα τότε δημιουργείται η θεωρία $T'=T+G_T$. Η T΄ είναι ορθή (αφού περιέχει την T και η G_T είναι αληθής, ενώ η λογική της, διατηρεί την παραγωγή αλήθειας . Πάλι όμως μπορούμε να βρούμε μια πρόταση G'_T ώστε $T' \vdash G'_T$ και $T' \nvdash G'_T$. Η T΄ είναι πιο ισχυρή από την T οπότε $T \vdash G'_T$ και $T \nvdash G'_T$. Έτσι αν και επιχειρήσαμε να καλύψουμε το κενό με την πρόταση G_T, η T παραμένει μη αποφασίσιμη στην επαυξημένη θεωρία. Αυτό φυσικά συνεχίζεται με αποτέλεσμα η T να είναι μη «πληρώσιμη».

5.4. Ω-συνέπεια, ω-πληρότητα.

Ορισμός 40 Μια θεωρία T είναι η **ω-μη πλήρης** ανν για κάποιο ανοικτό κδτ φ(x) , η T μπορεί να αποδείξει τη φ($\bar{n}$) για κάθε ένα φυσικό αριθμό n , αλλά η T δε μπορεί να αποδείξει ότι: ∀xφ(x).

Είδαμε ότι η Q είναι ω-μη πλήρης αφού μπορεί να αποδείξει κάθε σχέση $0+\bar{n} = \bar{n}$, αλλά δεν μπορεί να αποδείξει ότι ∀x(0+x=x). Θα μπορούσαμε να «επισκευάσουμε» την ω-μη πληρότητα, αν μπορούσαμε να προσθέσουμε τον ω-κανόνα, αλλά υπάρχει ένας μη περατός τρόπος, που δεν είναι διαθέσιμος σε μια τυπική θεωρία, αφού υπάρχουν οι συνήθεις περατοί περιορισμοί πάνω στην ικανότητα ελέγχου των αποδείξεων.

Ορισμός 41 Μια θεωρία T είναι **ω-μη συνεπής** ανν για κάποιο ανοικτό κδτ φ(x), η T μπορεί να αποδείξει κάθε φ($\bar{n}$), n φυσικός αριθμός, και η T μπορεί επίσης να αποδείξει ¬∀xφ(x).

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε η T είναι ω-μη συνεπής αν για κάποιο ανοικτό κδτ $\varphi_1(x)$, $T \vdash \exists x \varphi_1(x)$, αλλά για κάθε αριθμό n , έχουμε $T \vdash \neg\, \varphi_1(\bar{n})$

Η ω-μη συνέπεια, είναι συντακτικά ορισμένη και το χαρακτηριστικό της αφορά τους κδτ που μπορεί να αποδείξει και όχι τι αυτοί σημαίνουν. Η ω-συνέπεια (όταν ορίζεται, ως να μην είναι ω-μη συνεπής) προφανώς συνάγει απλή συνέπεια. Αυτό επειδή η T μπορεί να μην είναι ικανή να αποδείξει ένα ορισμένο συνδυασμό από κδτ, αλλά δεν μπορεί να είναι ασυνεπής, οπότε αποδεικνύει όλους τους κδτ.
Στην θεωρία της αριθμητικής η ω-μη πληρότητα είναι μια αδυναμία (δεν μπορεί να αποδείξει κάτι που θα θέλαμε, δηλαδή ∀xφ(x)), αλλά η ω-μη συνέπεια είναι πολύ

σημαντική αδυναμία. Προφανώς μια θεωρία που μπορεί να αποδεικνύει κάθε φ($\bar{n}$) και επίσης αποδεικνύει ¬∀xφ(x) δεν μπορεί να είναι υποψήφια για να τυποποιήσει μια αυστηρή αριθμητική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 21 Αν η Τ είναι **ω-μη συνεπής**, τότε όλα τα αξιώματα της, δεν μπορεί να είναι αληθή, στο αριθμητικό πρότυπο ερμηνείας της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η Τ είναι ω-μη συνεπής και έχει ένα αριθμητικό πρότυπο ερμηνείας, που χρησιμοποιώντας αριθμητικούς ποσοδείκτες διατρέχει το σύνολο των φυσικών. Υποθέτουμε ακόμη ότι η Τ είναι ορθή ως προς το λογικό σύστημα συμπερασμού της. Αν όλα τα αξιώματά της είναι αληθή, τότε και τα θεωρήματά της θα είναι αληθή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιον κδτ φ(x), η Τ αποδεικνύει κάθε μια από τις φ($\bar{0}$), φ($\bar{1}$), φ($\bar{2}$),… Από την υπόθεση, αυτά τα θεωρήματα είναι αληθή, οπότε κάθε φυσικός αριθμός ικανοποιεί την φ(x). Έτσι η ∀xφ(x) είναι αληθής αφού το πεδίο ορισμού-εφαρμογής είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Ως εκ τούτου η ¬∀xφ(x) θα είναι ψευδής. Έτσι η ¬x∀φ(x) δεν είναι θεώρημα και η Τ πρέπει να είναι ω-συνεπής. Άτοπο.

Με βάσει αυτό θέλουμε μια τυπική αριθμητική που όλα τα αξιώματά της να είναι αληθή, δηλαδή να είναι ω-συνεπής. Η PA είναι ορθή στην ερμηνεία της οπότε δεσμευόμαστε ότι είναι ω- συνεπής.

5.5 Η συντακτική εκδοχή του ΘΜΠ

Χρησιμοποιώντας τώρα ότι η PA καταγράφει την ιδιότητα *Gdl* με την Gdl**,** μπορούμε να αποδείξουμε, ότι πάλι η PA δεν αποδεικνύει την G, αλλά τώρα χωρίς την σημασιολογική παραδοχή, ότι η PA είναι ορθή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 22 Αν η PA είναι συνεπής, τότε η PA⊬G

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η G αποδεικνύεται στην PA, τότε υπάρχει κάποιος ειδικός αριθμός Gödel n που κωδικοποιεί την απόδειξη. Από τον ορισμό η G είναι η διαγωνοποίηση του κδτ U, οπότε Gdl_T(m,$\ulcorner U \urcorner$). Χρησιμοποιώντας τώρα ότι η Gdl καταγράφει την Gdl_T, θα είναι PA ⊢ Gdl($\bar{m}$, $\overline{\ulcorner U \urcorner}$).

Όμως η G είναι η ∀x¬ Gdl(x, $\overline{\ulcorner U \urcorner}$), οπότε λόγω του καθολικού ποσοδείκτη, είναι PA ⊢ ¬ **Gdl**($\bar{m}$, $\overline{\lceil U \rceil}$).

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η PA είναι μη συνεπής.

Οπότε αν η **PA είναι συνεπής, τότε η PA⊬G.**

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος είναι το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 23 Αν η PA είναι συνεπής, τότε η PA είναι ω-μη πλήρης

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η PA είναι συνεπής, τότε η PA⊬G και

PA ⊬∀x¬ Gdl(x, $\overline{\lceil U \rceil}$) (1)

Αφού η G είναι μη αποδείξιμη, τότε δεν υπάρχει ειδικός αριθμός Gödel που να κωδικοποιεί την απόδειξη, δηλαδή για κάθε m δεν ισχύει η Gdl ($\bar{m}$, $\overline{\lceil U \rceil}$οπότε

∀ m PA ⊢ ¬Gdl($\bar{m}$, $\overline{\lceil U \rceil}$) (2)

Θεωρώντας την φ(x)=$_{\text{ορισμός}}$ ¬ Gdl(x, $\overline{\lceil U \rceil}$) τότε από τις παραπάνω σχέσεις (1), (2) συνάγεται ότι η PA είναι ω-μη πλήρης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24 Αν η PA είναι ω-συνεπής, τότε η PA⊬¬G

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν η ¬G αποδείξιμη τότε PA⊢ ¬G τότε PA⊢∃ xGdl(x, $\overline{\lceil U \rceil}$)

Αφού η PA είναι ω-συνεπής τότε είναι συνεπής. Τώρα αν η ¬G αποδείξιμη τότε η G είναι μη αποδείξιμη, οπότε δεν υπάρχουν m,n που να κωδικοποιούν την απόδειξή της. Αλλά η G είναι ο κδτ από τη διαγωνοποίηση της U, οπότε για κάθε m η *Gdl*(m,$\lceil U \rceil$)είναι ψευδής.

Επειδή η Gdl καταγράφει την *Gdl* τότε: ∀ m PA ⊢ ¬Gdl($\bar{m}$, $\overline{\lceil U \rceil}$).

Φανερό ότι η PA είναι ω-μη συνεπής, άτοπο. Άρα η ¬G δεν είναι αποδείξιμη.

Από τα παραπάνω θεωρήματα συνάγεται ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 25 Αν η PA είναι συνεπής τότε υπάρχει μια Π_1 πρόταση G ώστε PA⊬ G, και αν η PA είναι ω-συνεπής, τότε PA⊬ ¬G, οπότε η PA δεν είναι πλήρης

Γενικεύουμε τώρα το παραπάνω θεώρημα. Υποθέτουμε ότι η T είναι π.α., αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που περιέχει την Q, αποδεικνύει τα αξιώματα της Q και επεκτείνει τη γλώσσα της βασικής αριθμητικής. Εγκαθιστώντας ένα σύστημα κωδικοποίησης Gödel στους κδτ της Τ, τότε η *$Gdl_T(m,n)$*, η οποία ορίζεται ως ο Gn m της Τ-απόδειξης της διαγωνοποίησης του κδτ με Gn το n, θα είναι π.α.. Αφού η Τ αποδεικνύει, ότι δύναται να αποδείξει η Q, τότε η Τ μπορεί να καταγράψει τη σχέση *$Gdl_T(m,n)$*, με ένα Σ_1 κδτ Gld_T(m,n). Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο όπως στην PA, μπορεί να κατασκευαστεί ένας αντίστοιχος Π_1 κδτ G_T. Γενικεύοντας λοιπόν έχουμε το:

ΘΕΩΡΗΜΑ 26 Αν η Τ είναι συνεπής π.α. αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που περιέχει την Q, τότε υπάρχει μια Π_1 πρόταση G_T ώστε $T \nvdash G_T$, και αν η Τ είναι ω-συνεπής, τότε $T \nvdash \neg G_T$, οπότε η Τ δεν είναι πλήρης.

Το παραπάνω θεώρημα, παράγει μη πληρότητα, με βάση ότι για την Τ: α) είναι συντακτική ιδιότητα του να είναι π.α. αξιωματικοποιημένη, β) το να είναι συνεπής, είναι ένας τρόπος να μη παράγονται προτάσεις φ, ¬φ ταυτόχρονα αληθείς, γ) αφού περιέχει την Q τότε παράγει και όλα τα αξιώματα της Q. Τα παραπάνω είναι συντακτικές έννοιες και η πορεία που οδηγεί σε αυτό το θεώρημα εξαρτάται από τις δοθείσες συντακτικές παραδοχές που έχουν γίνει. Έτσι το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως 1^o ΘΜΠ (χωρίς ποσοδείκτες) από συντακτικής σκοπιάς, όπως το αναφέρουν πολλοί.

Το θεώρημα αυτό αναφέρει για την ορισμένη ποσότητα αριθμητικής που πρέπει να περιέχει η Τ, καθώς και την πρόσθετη επιθυμητή ιδιότητα, επίσης αναφέρεται στην πρόταση Gödel και στη μικρή πολυπλοκότητα ποσοδεικτών που αυτή περιέχει, δηλαδή ότι είναι Π_1 πρόταση. Όμως είναι ασθενέστερο από το αρχικό θεώρημα 2 αφού εφαρμόζεται σε π.α. αξιωματικές θεωρίες και όχι γενικά σε τυπικές αξιωματικές θεωρίες. Το παραπάνω θεώρημα αναφέρεται στην γλώσσα Q της αριθμητικής Robinson που αναπτύχθηκε το 1950, ενώ ο Godel το απέδειξε το 1931. Έτσι το θεώρημα αυτό δεν μπορεί να είναι ακριβώς αυτό που απέδειξε ο Gödel.

Κοιτώντας την ανάλυση στο συντακτικό επιχείρημα του ΘΜΠ, ενδιαφερόμαστε για θεωρίες που επεκτείνουν την Q, γιατί αυτές μπορούν να καταγράψουν π.α. σχέσεις όπως η *Gdl*. Το να μπορούν να καταγράψουν την *Gdl* είναι ζωτικής σημασίας, γιατί τις καθιστά μη πλήρεις.

Ορισμός 42 Μια θεωρία Τ είναι π.α. επαρκής αν μπορεί να καταγράφει όλες τις π.α. συναρτήσεις και σχέσεις.

Οπότε αντί να γίνεται αναφορά στην Q απαιτούμε την π.α. επάρκεια. Το θεώρημα που από ιστορικής άποψης είναι πιο κοντά σε αυτό που λέμε **πρώτο ΘΜΠ του Gödel** είναι το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 27 Αν η T είναι επαρκώς π.α., αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που η γλώσσα της περιέχει την L_A, τότε υπάρχει μια Π_1 πρόταση φ ώστε, αν η T είναι συνεπής τότε $T \nvdash \varphi$, και αν η T είναι ω-συνεπής τότε $T \nvdash \neg\varphi$.

Στο έγγραφο του, το 1931, ο Gödel αποδεικνύει πρώτα το θεώρημα VI και με λίγη βοήθεια από το VIII δείχνει ότι το τυπικό σύστημα P (είναι η απλοποιημένη εκδοχή της ιεραρχικής θεωρίας τύπων του Principia Mathematica), έχει μια τυπικά μη αποφασίσιμη πρόταση Π_1(λέγεται και πρόταση τύπου Goldbach). Οπότε γενικεύει ότι στην απόδειξη του θεωρήματος VI δεν χρησιμοποιήθηκαν ιδιότητες του συστήματος P εκτός από τα ακόλουθα:

1. Η κατηγορία των αξιωμάτων και οι κανόνες συμπερασμού είναι π.α. ορισμένα.
2. Κάθε π.α. σχέση είναι ορισμένη (δηλαδή είναι καταγράψιμη) στο σύστημα P.

Ως εκ τούτου, σε κάθε τυπικό σύστημα που ικανοποιεί τις υποθέσεις 1 και 2 και είναι ω-συνεπές, υπάρχουν μη αποφασίσιμες προτάσεις μορφής $\forall xF(x)$, όπου F(x) είναι π.α. ορισμένη ιδιότητα των φυσικών αριθμών και το ίδιο ισχύει σε κάθε επέκταση ενός τέτοιου συστήματος με μία αναδρομικά ορισμένη ω-συνεπή κατηγορία αξιωμάτων.

5.6. Λήμμα διαγωνοποίησης

Κάνοντας μια επισκόπηση ας θυμηθούμε ότι ορίσαμε αριθμητικές σχέσεις β.α., όπως η *Prf(m,n)* που χρησιμοποιεί τον αριθμό m για να κωδικοποιήσει αν μια πρόταση με κωδικό αριθμό n είναι απόδειξη στην PA, Η Gdl(x,y) που εκφράζεται από κάποιους Σ_1 κδτ καταγράφει την *Gdl(m,n)*, η οποία ορίζεται ως *Prf(m, diag(n)),* δηλαδή ορίζεται ως ο Gn m, της απόδειξης της διαγωνοποίησης του κδτ με Gn το n.

Η PA εκφράζει την Gdl(x,y), Ορίσαμε την $U(y) =_{ορισμός} \forall x \neg Gdl(x, y)$, κατασκευάσαμε την πρόταση Gödel διαγωνοποιώντας την U, με την G= $_{ορισμός}$ $U(\overline{\ulcorner U \urcorner})= \forall x \neg Gdl(x, (\overline{\ulcorner U \urcorner}))$. Η G είναι αληθής, ανν είναι μη αποδείξιμη στην PA. Έτσι αν η PA είναι αξιόπιστη, τότε δεν μπορεί να αποδείξει, ούτε την G, ούτε την άρνησή της και αυτό είναι το 1^o ΘΜΠ από σημασιολογικής σκοπιάς για την PA. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί και σε άλλες γλώσσες πιο πλούσιες από την L_A

Με την ασθενέστερη παραδοχή ότι η PA είναι συνεπής, πάλι δεν αποδεικνύει την G (χρησιμοποιώντας ότι η Gdl καταγράφει την *Gdl*). Κάνοντας την ισχυρότερη παραδοχή ότι η PA είναι ω-συνεπής, τότε η PA δεν αποδεικνύει την άρνηση της G και αυτό είναι το 1^o ΘΜΠ από συντακτικής σκοπιάς. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί και σε άλλες β.α. αξιωματικές θεωρίες που περιέχουν την Q.

Ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε το 1^o ΘΜΠ από συντακτικής σκοπιάς είναι το λήμμα διαγωνοποίησης, το οποίο είναι ενδιαφέρον, γιατί οδηγεί στα θεωρήματα των Tarski και Rosser

ΘΕΩΡΗΜΑ 28 Ο κδτ $Diag_T(x,y)$ καταγράφει την συνάρτηση diag στην γλώσσα Q

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προκύπτει από τη γενίκευση του θεωρήματος 32.

ΘΕΩΡΗΜΑ 29 (Γενικευμένο λήμμα διαγωνοποίησης) Αν η T επεκτείνει την Q και φ είναι μια ανοιχτή πρόταση μιας μεταβλητής στην T-γλώσσα, τότε υπάρχει μια πρόταση δ ώστε: i) η $\delta \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner \delta \urcorner})$ είναι αληθής ii) $T \vdash \delta \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner \delta \urcorner})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Θέτουμε $\alpha =_{ορισμός} \forall x(Diag(y,x) \rightarrow \varphi(x))$ και δ η διαγωνοποίηση του α, οπότε $\delta = \forall x(Diag(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner},x) \rightarrow \varphi(x))$. Αφού η διαγωνοποίηση του α παράγει την δ τότε $diag(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})= \overline{\ulcorner \delta \urcorner}$. Αφού τώρα η Diag εκφράζει την diag και επειδή η $Diag(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}, x))$ ικανοποιείται από την $\ulcorner \delta \urcorner$ και από κανένα άλλο αριθμό τότε η δ είναι αληθής ανν η $\ulcorner \delta \urcorner$ επίσης ικανοποεί την φ(x). Επομένως η $\leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner \delta \urcorner})$ είναι αληθής.

ii) Είχαμε δεί (ορισμός 28) ότι η θεωρία T καταγράφει μια συνάρτηση f από τον ανοιχτό κδτ χ(x,y) ανν για κάθε m,n i) αν f(m)=n τότε $T \vdash \chi(\overline{m}, \overline{n})$

ii) αν f (m)≠ n τότε T⊢¬ χ($\overline{m},\overline{n}$) και iii) T⊢∃!y x($\overline{m},y$). H i) μαζί με την iii) δίνουν: αν f(m)=n τότε T⊢∀z(χ($\overline{m},x$)↔x=$\overline{n}$)

Επειδή η Diag καταγράφει την diag στην Q, τότε T⊢∀x(Diag($\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}$,x) ↔x=$\overline{\ulcorner\delta\urcorner}$. Από τον ορισμό όμως δ=∀x(Diag($\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}$,x)→φ(x)), οπότε χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ισοδυναμία παίρνουμε T⊢δ↔∀x(x=$\overline{\ulcorner\delta\urcorner}$→φ(x)), η οποία τελικά οδηγεί στην T⊢δ↔φ($\overline{\ulcorner\delta\urcorner}$).

Ορισμός 43 Αν η δ είναι τέτοια ώστε T⊢δ↔φ($\overline{\ulcorner\delta\urcorner}$), τότε λέμε η σ **είναι σταθερό σημείο για την φ.**

Το λήμμα διαγωνοποίησης είναι γνωστό και ως **θεώρημα σταθερού σημείου** και κάθε ανοιχτή πρόταση μιας μεταβλητής έχει ένα σταθερό σημείο. Υποθέτουμε ότι η Prf_T(m,n) είναι η σχέση που δηλώνει ότι ο m είναι ο αριθμός Gödel μιας T-απόδειξης για μια πρόταση με αριθμός Gödel n. H T (υποθέτουμε ότι επεκτείνει την Q) μπορεί να καταγράψει κάθε π.α. σχέση όπως Prf_T

Ορισμός 44 Ο κδτ που καταγράφει την Prf_T εκφράζεται από την **Prf$_T$**

Ορισμός 45 **H Prov$_T$(y)=$_{\text{ορισμός}}$∃x Prf$_T$**(x,y) είναι ένα κατηγόρημα αποδειξιμότητας για την T

Επειδή η Prov$_T$ είναι ορισμένη βάσει της Prf$_T$, είναι μια πρόταση τύπου Σ_1 και όταν η Prov$_T$ ($\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$),)είναι αληθής, τότε η φ είναι θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 30 Έστω η T είναι π.α. αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που περιέχει την Q και γ είναι σταθερό σημείο για την ¬Prov, δηλαδή T⊢γ↔¬Prov($\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$), τότε i) αν η T είναι συνεπής, T⊬γ ii)αν η T είναι ω-συνεπής T⊬¬γ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω T⊢γ τότε T⊢¬Prov($\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$), όμως αν υπάρχει μια απόδειξη γ, τότε για κάποιο m είναι T⊢Prf($\overline{m},\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$) και αφού T⊢∃xPrf($x,\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$, τότε T⊢ Prov($\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$). Επομένως η T είναι ασυνεπής, αλλά αν θέλουμε να είναι συνεπής τότε T⊬γ.

ii)) Έστω T⊢¬γ τότε T⊢Prov($\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$), τότε T⊢∃xPrf($x, \overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$. Με δεδομένη όμως την συνέπεια της T δεν υπάρχει απόδειξη της γ δηλαδή για κάθε m δεν ισχύει η Prf($\overline{m}, \overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$) δηλαδή για κάθε m T⊢¬ Prov($\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$).Έτσι υπάρχει η φ ώστε T⊢∃xφ(x), αλλά αναιρεί κάθε περίπτωση φ($\overline{m}$), επομένως η T ω-μη συνεπής. Αν θέλουμε όμως να είναι ω-συνεπής τότε T⊬¬γ.

Μια ειδική περίπτωση του γενικευμένου λήμματος διαγωνοποίησης είναι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 31 Υπάρχει μια πρόταση γ ώστε T⊢↔ ¬Prov($\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}$).

Τα δύο τελευταία θεωρήματα καλύπτουν το θεώρημα 26.

Ένα σταθερό σημείο για την ¬$Prov_T$, είναι η απόδειξη της G_T. Η G_T είναι αληθής ανν είναι μη αποδείξιμη στην T και αυτό μπορεί στην T να εκφραστεί από τον κδτ G_T ↔ ¬$Prov_T$($\overline{\ulcorner G_T\urcorner}$). Επειδή η T δεν το εκφράζει αυτό προχωρούμε στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 32 Αν η T είναι π.α. αξιωματικοποιήσιμη και περιέχει την Q, τότε: T⊢ G_T ↔ ¬$Prov_T$($\overline{\ulcorner G_T\urcorner}$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τον ορισμό Gdl(x,y) $=_{\text{ορισμός}}$ ∃z(Prf(x, z) ∧ Diag(y, z)).

Ορίζουμε επίσης

G$=_{\text{ορισμός}}$ ∀x¬Gdl(x, $\overline{\ulcorner U\urcorner}$)

↔	∀x¬∃z(Prf(x, z) ∧ Diag($\overline{\ulcorner U\urcorner}$, z))	από τον ορισμό της Gdl
↔	∀x∀z¬(Prf(x, z) ∧ Diag($\overline{\ulcorner U\urcorner}$, z))	ιδιότητα της άρνησης
↔	∀z∀x¬(Prf(x, z) ∧ Diag($\overline{\ulcorner U\urcorner}$, z))	εναλλάσσοντας τους ποσοδείκτες
↔	∀z(Diag($\overline{\ulcorner U\urcorner}$, z)→ ¬∃x(Prf(x, z))	αναδιατάσσοντας μετά το ∀
↔	∀z(Diag($\overline{\ulcorner U\urcorner}$, z)→ ¬∃v(Prf(v, z))	αλλάζοντας τις μεταβλητές
↔	$_{\text{ορισμός}}$ ∀z(Diag($\overline{\ulcorner U\urcorner}$, z)→¬Prov(z)	ορισμός της Prov

Αφού οι παραπάνω χειρισμοί ήταν λογικοί στην Q άρα και στην T, τότε

T⊢G↔∀z(Diag($\overline{\ulcorner U\urcorner}$, z)→ ¬Prov(z))

Διαγωνοποιώντας την U παράγουμε την G, οπότε diag($\lceil U \rceil = \lceil G \rceil$ και επειδή η Diag καταγράφει την diag, τότε $T \vdash \forall z(\mathrm{Diag}(\overline{\lceil U \rceil}, z) \leftrightarrow z = \overline{\lceil G \rceil})$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $T \vdash G \leftrightarrow \forall z(z = \overline{\lceil G \rceil} \rightarrow \neg \mathrm{Prov}(z))$ και επειδή $\neg \mathrm{Prov}(z) \leftrightarrow \mathrm{Prov}(\overline{\lceil G_T \rceil})$, προκύπτει η ζητούμενη.

5.7. Το θεώρημα του Rosser

Όπως είδαμε το ΘΜΠ κατά το ήμισυ απαιτεί την παραδοχή ότι η θεωρία T πρέπει να είναι ω-συνεπής και όχι απλά συνεπής. O Barkley Rosser, βελτίωσε αυτή την παραδοχή κατασκευάζοντας μια διαφορετική και περισσότερο πολύπλοκη πρόταση R_T. Για να δείξει ότι η R_T είναι τυπικά μη αποφασίσιμη, χρειάστηκε μόνο την απαίτηση, η T να είναι απλά συνεπής.

Ενώ ο Gödel κατασκεύασε μια πρόταση G_T η οποία έμμεσα λέει « δεν είμαι αποδείξιμη στην T», ο Rosser κατασκεύασε μια πρόταση R_T διαφορετική και περισσότερο πολύπλοκη, η οποία έμμεσα λέει «αν είμαι αποδείξιμη στην T, τότε η άρνησή μου, είναι ήδη αποδείξιμη στην T». Δηλαδή λέει ότι αν η R_T έχει απόδειξη με κωδικό αριθμό n, τότε η $\neg R_T$ έχει απόδειξη με μικρότερο κωδικό αριθμό συγκριτικά με αυτή.

Θεωρούμε τη σχέση $\overline{Prf_T}$ *(m,n)* που χρησιμοποιεί τον αριθμό m για να κωδικοποιήσει την T-απόδειξη της άρνησης ενός κδτ με κωδικό αριθμό n. Αυτή η σχέση είναι π.α. και καταγράφεται από τον κδτ $\overline{\mathbf{Prf_T}}$ (x,y), οπότε το κατηγόρημα αποδειξιμότητας του Rosser δίνεται από τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 46 $\mathbf{RProv_T}(x) =_{ορισμός} \exists v(\mathbf{Prf_T}(v, x) \wedge (\forall w \leq v) \neg \overline{\mathbf{Prf_T}}(w,x))$.

Μια πρόταση είναι T-αποδείξιμη κατά Rosser, όταν έχει μια απόδειξη και δεν υπάρχει «μικρότερη» (με την έννοια που αναφέραμε παραπάνω) απόδειξη για την άρνηση της πρότασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 33 Έστω η T είναι π.α. και περιέχει την Q, τότε υπάρχει μια πρόταση R_T ώστε $T \vdash R_T \leftrightarrow \neg \mathrm{RProv}_T(\overline{\lceil R_T \rceil})$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι άμεση εφαρμογή από το λήμμα διαγωνοποίησης της άρνησης του κατηγορήματος αποδειξιμότητας κατά Rosser.

Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεωρήματα

ΘΕΩΡΗΜΑ 34 Έστω η T συνεπής π.α. αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που περιέχει την Q και έστω δ ένα σταθερό σημείο για την $\neg RProv_T(x,y)$. Τότε $T \nvdash \delta$ και $T \nvdash \neg\delta$, οπότε η T δεν είναι πλήρης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 35 **(Θεώρημα του Rosser)** Αν η T είναι π.α. επαρκής, αξιωματικοποιήσιμη θεωρία, της οποίας η γλώσσα περιλαμβάνει την L_A, τότε υπάρχει μια πρόταση φ τύπου Π_1, ώστε αν η T είναι συνεπής, τότε $T \nvdash \varphi$ και $T \nvdash \neg\varphi$, οπότε η T δεν είναι πλήρης.

Κεφάλαιο 6. Συνέπειες και παρερμηνείες των ΘΜΠ

6.1. Τα ΘΜΠ σε αδόκιμη μορφή

Τα θεωρήματα μη-πληρότητας που απέδειξε ο Gödel , ήταν αναμφίβολα δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα στην ιστορία των μαθηματικών και μαζί με τη θεωρία της σχετικότητας του Einstein και την αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg θεωρούνται ως τα τρία πιο επαναστατικά αποτελέσματα του εικοστού αιώνα. Επηρέασαν βαθύτατα τα φιλοσοφικά ρεύματα εκείνης της εποχής και είχαν τεράστιο αντίκτυπο στην φιλοσοφία των μαθηματικών.

Η ιδιοφυία του Gödel έγκειται στο ότι χρησιμοποίησε τρείς διακριτές γλώσσες (θεωρίες) αναπαριστάσιμες μεταξύ τους. Την **Διαισθητική αριθμητική** (Δ.Α.) που εκφράζει προτάσεις με περιεχόμενο αλήθειας ή ψεύδους (π.χ, η 5=3 είναι ψευδής).

Την **τυπική ή φορμαλιστική αριθμητική** (Τ.Α.) που χρησιμοποιεί ένα συντακτικό σύστημα με ένα προκαθορισμένο σύνολο αξιωμάτων και κανόνες συμπερασμού που καθορίζει ποιοι τύποι αποτελούν θεωρήματα. Από μόνες τους οι φράσεις της Τ.Α. δεν είναι ούτε αληθείς ούτε ψευδείς, απλά μπορούν ή όχι τυπικά, στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος, να αποδειχθούν (π.χ., η $\forall x(x \neq sx)$είναι αποδείξιμη στην PA). Όμως υπάρχει μια ερμηνεία της Τ.Α. που επιτρέπει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των ψηφίων της Τ.Α. και των αριθμών της Δ.Α. και μεταξύ των αληθών προτάσεων της Δ.Α. και των θεωρημάτων της Τ.Α., δηλαδή η Τ.Α. αναπαριστά την Δ.Α. Η τρίτη γλώσσα εκφράζει τη **μεταθεωρία** (Μ.Τ.Α.) της Τ.Α., στην οποία διατυπώνουμε συντακτικούς κανόνες της αποδεικτικής θεωρίας της Τ.Α. Όπως η Δ.Α. έτσι και η Μ.Τ.Α. αποτελείται από εκφράσεις που έχουν νόημα και τιμή αλήθειας και ορίζει τι σημαίνει απόδειξη (π.χ., η «0=0» είναι θεώρημα).

Η έμπνευση του Gödel ήταν να φτιάξει ένα τύπο στην Τ.Α. που να έχει ταυτόχρονα δύο σημασίες σε δύο γλώσσες, τη Μ.Τ.Α. και την Δ.Α. Ο τύπος του ήταν ταυτόχρονα μη αποδείξιμος στη Τ.Α. και διαισθητικά αληθής στη Μ.Τ.Α. και την Δ.Α. Ο τύπος του ήταν αποδείξιμα μη αποδείξιμος στην Τ.Α. και όμως εξέφραζε μια αληθή πρόταση στη Δ.Α. (μια περίπλοκη αληθή σχέση μεταξύ φυσικών) καθώς και μια αληθή πρόταση στη Μ.Τ.Α. σχετικά με την μη αποδειξιμότητά της. Χρησιμοποίησε αναδρομικές συναρτήσεις που αποφασίζουν πότε ένας τύπος είναι κδτ, πότε μια ακολουθία τύπων αποτελεί απόδειξη (π.χ. η Prf(m,n) είναι αναδρομική σχέση και είναι αληθής αν η πρόταση με κωδικό αριθμό n είναι απόδειξη στην PA, χρησιμοποιεί δε τον αριθμό m για να κωδικοποιήσει αυτή την απόδειξη).

Ας δούμε ξανά αλλά με κάπως πιο αδόκιμο και περιγραφικό τρόπο τα δύο θεωρήματα του Gödel , ώστε να περάσουμε στις συνέπειες και τις παρερμηνείες τους. Το πρώτο ΘΜΠ αναφέρεται σε όλα τα τυπικά συστήματα στα οποία είναι αναπαραστάσιμες όλες οι αναδρομικές συναρτήσεις φυσικών αριθμών. Αναφέρεται λοιπόν στην ασθενέστερη αριθμητική Robinson (γλώσσα Q) που είναι η αριθμητική Peano (PA), χωρίς το αξιωματικό σχήμα της μαθηματικής επαγωγής, φυσικά στην PA, αλλά και σε ισχυρότερες μαθηματικές θεωρίες όπως αυτή των Zermelo-Fraenkel με αξίωμα επιλογής (ZFC) που θεωρείται ως το θεμέλιο όλων των κλασικών μαθηματικών. Θεωρούμε μια θεωρία T με γλώσσα L που επεκτείνει την PA (περιέχει τα σύμβολά της και αποδεικνύει τα αξιώματά της).

1^{o}ΘΜΠ. Κάθε συνεπής αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που επεκτείνει την PA είναι μη πλήρης.

Σε πρώτη φάση υπάρχει στην L κατηγόρημα **B** (από τη γερμανική λέξη **Beweis** που σημαίνει απόδειξη), ώστε για κάθε πρόταση της φ να είναι $\mathbf{T\vdash\varphi \Leftrightarrow T\vdash B(\ulcorner\varphi\urcorner)}$ (1), όπου $\ulcorner\varphi\urcorner$ είναι ο αριθμός Gödel της φ. Το κατηγόρημα B κωδικοποιεί λοιπόν την έννοια της T-αποδειξιμότητας.

Σε δεύτερη φάση κατασκευάζεται ο τύπος G_T (πρόταση Gödel για την T) ώστε $\mathbf{T\vdash G_T \Leftrightarrow \mathit{T}\neg B(\ulcorner G_T\urcorner)}$ (2), δηλαδή η G_T είναι T-αποδείξιμη ανν δεν ισχύει η αποδειξιμότητα της κωδικοποίησής της.

Αν υποθέσουμε ότι η G_T είναι T-αποδείξιμη τότε από την (1) $T\vdash B(\ulcorner G_T\urcorner)$, ενώ από την (2) $T\vdash\neg B(\ulcorner G_T\urcorner)$, οπότε η T ασυνεπής. Άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι η $\neg G_T$ είναι T-αποδείξιμη τότε από την (2) θα είναι $T\vdash B(\ulcorner G_T\urcorner)$ δηλαδή T-αποδείξιμη και από την(1) θα είναι $T\vdash G_T$, οπότε η T ασυνεπής. Άτοπο. Αν τώρα θέλουμε να έχουμε συνεπή θεωρία T τότε ούτε η πρόταση G_T ούτε η $\neg G_T$ είναι αποδείξιμες. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι η T είναι μη πλήρης.

Η παραπάνω διατύπωση του πρώτου ΘΜΠ αφορά τη βελτίωση που επέφερε ο B.Rosser, καθώς ο Gödel προϋποθέτει επιπλέον ότι η Τ είναι ω-συνεπής. Δηλαδή ο Gödel με την υπόθεση ότι η G_T είναι Τ-αποδείξιμη απέδειξε ότι η $\neg G_T$ είναι Τ-αποδείξιμη, δηλαδή η Τ είναι μη συνεπής. Ενώ την υπόθεση ότι η $\neg G_T$ είναι Τ-αποδείξιμη, απέδειξε ότι η Τ είναι ω-μη συνεπής. Μια θεωρία Τ που επεκτείνει την PA είναι ω-συνεπής αν και μόνο αν δεν υπάρχει τύπος φ(x) τέτοιος ώστε οι φ(0), φ(1),φ(2),... να είναι αποδείξιμοι στην Τ και επίσης ο τύπος $\exists x \neg \varphi(x)$ να είναι αποδείξιμος στην Τ. Η ίδια η PA είναι ω-συνεπής και αν μια θεωρία είναι ω-συνεπής, τότε θα είναι συνεπής. Όμως το αντίστροφο δεν ισχύει.

Το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας είναι συνέπεια του $1^{ου}$ΘΜΠ. Αποδεικνύεται ότι για κάθε συνεπή αξιωματικοποιήσιμη πρωτοβάθμια θεωρία που επεκτείνει την PA, η **πρόταση Con(T)=¬B(⌜⊥⌝)**, όπου ⊥ είναι μια αντίφαση στη γλώσσα της (π.χ., η ¬(2=2)) είναι ισοδύναμη με τη πρόταση Gödel G_T , δηλαδή: $\mathbf{T \vdash G_T \leftrightarrow Con(T)}$. Οπότε η Con(T) θα είναι μη αποφασίσιμη αφού, από το $1^{ο}$ΘΜΠ, η $\mathbf{G_T}$ είναι μη αποφασίσιμη στην Τ. Συνοψίζοντας, έχουμε το:

$2^{ο}$ΘΜΠ Αν η Τ είναι μια συνεπής αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που επεκτείνει την PA, B είναι το κατηγόρημα που κωδικοποιεί την Τ-αποδειξιμότητα και Con(T) = ¬B(⌜⊥⌝), όπου ⊥ είναι μια αντίφαση στην Τ, τότε $T \nvdash$ Con (T) και $T \nvdash$ ¬Con (T).

Αν η Con (T) εκφράζει την αδυναμία της Τ να αποδείξει μια αντίφαση και, με αυτό τον τρόπο, τη συνέπεια της, τότε από το $2^{ο}$ΘΜΠ συμπεραίνουμε ότι καμιά συνεπής αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που επεκτείνει την PA δεν μπορεί να αποδείξει την ίδια της τη συνέπεια. Γενικεύοντας, κανένα συνεπές αξιωματικό σύστημα που είναι αρκετά ισχυρό ώστε να μπορεί να αναπαραστήσει κάθε αναδρομική σχέση μεταξύ φυσικών αριθμών δεν μπορεί να αποδείξει την ίδια του τη συνέπεια.

6.2 Ο ανθρώπινος νους και οι υπολογιστές

Ο Thomas Hobbes ήταν ο πρώτος που προσέγγισε εκείνη τη φιλοσοφία του νου σύμφωνα με την οποία κάθε σκέψη (με προτασιακά περιεχόμενα) είναι ένας υπολογισμός που θα μπορούσε να εκτελεστεί από μια μηχανή. Ο ίδιος κατά το 1651 ανέφερε ότι ο συλλογισμός, δεν είναι παρά υπολογισμός των συνεπειών των γενικών ονομάτων που έχουν συμφωνηθεί, για τη διάκριση και σήμανση των σκέψεων μας.

Ο John von Neumann ήταν ο πρώτος που ενδιαφέρθηκε για τα ΘΜΠ αλλά και αυτός που συνέβαλε περισσότερο στη διάδοσή τους. Ο Αμερικάνος Steven Klein ειδικός της λογικής και της θεωρίας των αναδρομικών συναρτήσεων (μαθητής του Alonzo Church) αφηγείται πως πρωτάκουσε για τον Gödel το 1931, όταν σε ένα σεμινάριο ο John von Neumann αντί της δικής του προγραμματισμένης εργασίας, παρουσίασε τα αποτελέσματα της εργασίας που δημοσίευσε ο Gödel στο έντυπο «*Monatshafte*» .

Ο Alan Turing αναδιατύπωσε τα αποτελέσματα του1931 του Gödel για τα όρια της απόδειξης και του υπολογισμού, αντικαθιστώντας τις αναδρομικές συναρτήσεις του Gödel με αυτό που αποκαλείται καθολικές μηχανές Turing.

Όμως τα ΘΜΠ του Gödel φαίνεται να αναδεικνύουν όρια στο τι μπορούν να επιτύχουν κάποιες μηχανές. Έτσι από τις αρχές της δεκαετίας του 1960 ξεκίνησε μια έντονη συζήτηση για τις συνέπειες των ΘΜΠ σχετικά με τη δυνατότητα «μηχανοποίησης» της ανθρώπινης σκέψης. Κατά αυτής της δυνατότητας έχουν ταχθεί ο John Lucas, ο Roger Penrose και, πιο πρόσφατα, ο Storrs McCall. Ο Lucas, καθηγητής του πανεπιστημίου της Οξφόρδης, ήταν ο πρώτος που επεσήμανε τη σχέση ανάμεσα στα ΘΜΠ και τον ανθρώπινο νου. Υποστήριξε ότι ο μηχανισμός είναι μια πλάνη και ο νους δεν μπορεί να εξηγηθεί ως μηχανή. Επίσης επεσήμανε ότι η λειτουργία ακόμα και πολύπλοκων μηχανών «σκέψης» θα βασίζεται σε προκαθορισμένους κανόνες που διατυπώνονται σε ένα τυπικό σύστημα. Έτσι θα υπάρχει κάποια πρόταση που η μηχανή δεν θα μπορεί να κατατάξει ως αληθή, ενώ ο ανθρώπινος νους θα μπορεί να τη συλλάβει ως αληθή. Αναφέρει [23]δε:

> «Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο του νου που θα είναι μηχανιστικό – ουσιαστικά δηλαδή «νεκρό»- αλλά ο νους ακριβώς επειδή είναι «ζωντανός» θα βρίσκεται πάντα ένα βήμα μπροστά σε σχέση με οποιοδήποτε τυπικό, απολιθωμένο, νεκρό σύστημα. Χάρη στο θεώρημα του Gödel ο νους θα έχει πάντα τον τελευταίο λόγο».

Ο μαθηματικός Roger Penrose, επίσης καθηγητής του πανεπιστημίου της Οξφόρδης έγραψε δύο βιβλία το *«The Emperor's New Mind»* και το *«Shadows of the Mind»*, στα οποία υποστηρίζει ότι ο νους αν και δεν λειτουργεί ως υπολογιστής, είναι όμως ένα φυσικό σύστημα. Θεωρεί ότι νους και εγκέφαλος είναι το ίδιο, οπότε η μη μηχανιστική φύση του νου που απορρέει από το $1^{ο}$ ΘΜΠ θα έπρεπε να κατευθύνει τη σκέψη μας προς μη μηχανιστικούς φυσικούς νόμους όπως αυτοί της κβαντομηχανικής. Είναι ένα φυσικό σύστημα ο νους, που αντιλαμβάνεται με διαισθητικό τρόπο τα μαθηματικά, αλλά αποδεδειγμένα δε μπορεί να κατανοηθεί μηχανιστικά. Επίσης λέει ότι θα πρέπει να δρομολογήσουμε την ανάπτυξη μιας διαφορετικής μη μηχανιστικής επιστήμης που θα λαμβάνει υπόψη και τις μη υπολογιστικές λειτουργίες του νου.

Ενδιαφέρον έχουν και οι απόψεις του ίδιου του Gödel για τη φύση του ανθρώπινου νου. Παραδεχόταν ότι ο μη μηχανισμός δεν απορρέει από τα ΘΜΠ και ένας υπέρμαχος του μηχανισμού θα έβρισκε τρόπους να το παρακάμψει. Πράγματι ο Benacerraf ένας από τους υπερασπιστές των δυνατοτήτων των μηχανών, το 1967 αναφέρθηκε [7] στη μηχανή Maud ότι είναι περιορισμένη να προσφέρει τυπικές Maud-αποδείξεις. Όμως δεν είναι σαφές ότι περιορίζει τις άτυπες αποδείξεις που μπορεί να επινοήσει και αυτό γιατί μπορεί να εφαρμόσει το επιχείρημα του Gödel στον εαυτό της. Δηλαδή από το $2^{ο}$ΘΜΠ μπορεί να αποδείξει την Con(Maud) $\rightarrow$GMaud. Συνέχισε δε αναρωτώμενος *«Δεν θα μπορούσε, λοιπόν, έτσι να πείσει τον εαυτό της ότι η G(Maud), μολονότι μη αποδείξιμη στη Maud, ήταν εντούτοις –στην πραγματικότητα, για αυτόν ακριβώς τον λόγο– αληθής»*;

Ο Gödel ανέφερε το 1951 ότι είχε αποδείξει (σαν συνέπεια των ΘΜΠ) την πρόταση: «*είτε ο ανθρώπινος νους ξεπερνά κάθε μηχανή (υπό την έννοια ότι μπορεί να αποφασίζει για περισσότερα ζητήματα θεωρίας αριθμών) είτε υπάρχουν ζητήματα της θεωρίας αριθμών μη αποφασίσιμα για τον ανθρώπινο νου*». Εξέφραζε τον προβληματισμό ότι όλες οι σκέψεις μπορεί να είναι μηχανιστικές και να υπακούν σε προκαθορισμένους κανόνες και απλώς να τελούμε υπό την ψευδαίσθηση ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τις μη τυποποιημένες μαθηματικές αλήθειες. Αν τώρα η ικανότητά μας να συλλαμβάνουμε μαθηματικές αλήθειες δεν αποτελεί ψευδαίσθηση τότε δεν είμαστε μηχανές. Εντούτοις όμως δεν υπάρχει απόδειξη ότι γνωρίζουμε όλα αυτά που θεωρούμε ότι γνωρίζουμε, αφού δεν υπάρχει τρόπος να τυποποιηθούν. Αυτό είναι ένα δείγμα της μη πληρότητας και δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν είμαστε μηχανές. **Τα ΘΜΠ οριοθετούν την τυποποίηση υποδηλώνοντας ότι ο ανθρώπινος νους ξεπερνά τις μηχανές αλλά συγχρόνως δείχνουν ότι αυτό δεν μπορεί να αποδειχθεί.** Ο Gödel ήταν πολύ επιφυλακτικός για την ανθρώπινη φύση σαν αποτέλεσμα συμπερασμού από τα ΘΜΠ και είχε πάντα σαφή διάκριση μεταξύ διαίσθησης και αυστηρής απόδειξης. **Αφήνει λοιπόν ανοικτό το ενδεχόμενο να είναι πλάνη ο ισχυρισμός, ότι κατέχουμε μαθηματικές γνώσεις που δεν επιδέχονται τυποποίηση.**

6.3 Η φιλοσοφία των μαθηματικών και τα ΘΜΠ

Το κυρίαρχο ρεύμα του εικοστού αιώνα ήταν ο φορμαλισμός του Hilbert, ο οποίος από το 1899 είχε δομήσει ένα αξιωματικό σύστημα για τη γεωμετρία που ανήγαγε τη συνέπειά της στη συνέπεια της θεωρίας αριθμών. Σκοπός του ήταν να δομήσει ένα περατοκρατικό πρόγραμμα ώστε να προφυλάξει τα μαθηματικά από τις κρυφές τους αντιφάσεις, αντικαθιστώντας σε κάθε μαθηματικό τομέα τα διαισθητικά μαθηματικά με ένα αξιωματικό σύστημα. Σε αυτό το τυπικό σύστημα έθεσε δύο ζητούμενα, τη συνέπεια και την πληρότητα του συστήματος. Οι αποδείξεις έπρεπε να είναι όχι ακριβώς πεπερασμένες αλλά «περατοκρατικές» (finitary), δηλαδή έπρεπε να ελέγχονται μηχανιστικά και να μην επικαλούνται ένα αφηρημένο και θεωρητικό άπειρο, όπως το περιέγραψε ο Cantor.

Το σύστημά του Hilbert έχει να κάνει με την **επικράτηση της μορφής επί του περιεχομένου, της σύνταξης επί της σημασιολογίας και της απόδειξης ενάντια στην αλήθεια**. Η κυριότερη ενσάρκωση ενός τέτοιου συστήματος ήταν μια μηχανή που η λειτουργία της βασίζεται στη σύνταξη και τις οδηγίες, δηλαδή στον Υπολογιστή.

Όταν ο Gödel ασχολήθηκε με το πρόγραμμα του Hilbert, ήθελε να διαπιστώσει αν μπορεί να αποδειχθεί η συνέπεια και η πληρότητα ενός τυπικού συστήματος στην μαθηματική ανάλυση. Ξεκίνησε όμως με ένα υποσύστημα ασθενέστερο, την αριθμητική ή θεωρία αριθμών, που είναι ο βασικότερος τομέας πάνω στον οποίο βασίζεται το μαθηματικό οικοδόμημα και απέδειξε ότι τα αξιώματα του Peano όπως και κάθε θεωρία που τα επεκτείνει δεν μπορεί να είναι πλήρη (από τυπική αξιωματική άποψη) και επιπλέον μη πληρώσιμα. Όπως έλεγε ο Gödel οι υπολογιστές δεν μπορούν από μόνοι τους να δημιουργήσουν νέα αξιώματα, επομένως κανένας υπολογιστής ή σύστημα υπολογιστών-ακόμα και άπειρο- δεν θα μπορέσει ποτέ να συλλάβει όλες τις αλήθειες της αριθμητικής. Χαρακτηριστικά αναφέρει: *«η επίκληση της μαθηματικής διαίσθησης είναι αναγκαία… προκειμένου να επιλυθούν τα προβλήματα της περατής θεωρίας αριθμών»*. Επομένως οι αλήθειες της αριθμητικής θεωρητικά δεν χωρούν σε ένα τυπικό σύστημα. Αυτό που απέδειξε ο Gödel είναι μια ουσιαστική διαφορά μεταξύ αλήθειας και απόδειξης, δηλαδή η μαθηματική αλήθεια δεν είναι ταυτόσημη με την (τυπική μηχανιστική) απόδειξη. Το κυρίαρχο ρεύμα στις αρχές του εικοστού αιώνα άρχισε να κλονίζεται και έχρηζε επανεξέτασης. Για τον Hilbert αυτό ήταν το πρώτο πλήγμα.

Ο John von Neumann στο συνέδριο του Königsberg κατά την παρουσίαση των ΘΜΠ από τον Gödel, πρώτος κατάλαβε τη μη αποδειξιμότητα της συνέπειας ενός τυπικού συστήματος, με επιχειρήματα που θα εκφράζονταν εντός του τυπικού συστήματος (ακόμα και αν τροποποιούνταν ή επεκτείνονταν) δηλαδή το 2^{ο} ΘΜΠ. Υποστήριξε δε πρώτος, ότι αυτό σημαίνει την οριστική ματαίωση του προγράμματος του Hilbert. Ο ίδιος ο Gödel για αρκετά χρόνια απέφευγε να αποκλείσει το ενδεχόμενο να βρει ο Hilbert περατοκρατική μέθοδο απόδειξης της συνέπειας που αναζητούσε. Ο Paul Bernays, αποκαλύπτει ότι και ο ίδιος είχε αμφιβολίες για την πληρότητα των τυπικών συστημάτων και έμμεσα το είχε αναφέρει στον Hilbert, ο οποίος όμως αντέδρασε με θυμό, (κατά τον ίδιο τρόπο αντέδρασε και όταν πληροφορήθηκε την απόδειξη του Gödel). Επρόκειτο όμως για μια απόδειξη και μάλιστα εκφρασμένη με τρόπο φορμαλιστικό. Ηχεί κάπως παράξενα, αλλά την απόδειξη των ΘΜΠ δεν τη διαπιστώνουμε μόνο εμείς οι νοήμονες άνθρωποι και οι έχοντες μαθηματική διαίσθηση, αλλά και ένας υπολογιστής αρκεί να πάρει κατάλληλες προγραμματιστικές οδηγίες.

Η επικρατούσα άποψη είναι ότι εξαιτίας των ΘΜΠ το πρόγραμμα του Hilbert οδηγήθηκε σε οριστική χρεοκοπία. Το κύριο επιχείρημα υπέρ της άποψης αυτής διατυπώνεται συνήθως ως εξής: το πρόγραμμα του Hilbert απαιτούσε την απόδειξη της συνέπειας της αριθμητικής με τη βοήθεια μόνον της αριθμητικής ενώ το 2οΘΜΠ του Gödel έδειξε ακριβώς ότι μια τέτοια απόδειξη δεν είναι δυνατή.

Όμως σύμφωνα με τον Α. Αραγεώργη, υπάρχουν δύο παραδοχές [2] που πρέπει να θεωρήσουμε σχετικά με το 2^{ο} ΘΜΠ. Η πρώτη προϋποθέτει ότι κάθε περατοκρατική μέθοδος απόδειξης μπορεί να τυποποιηθεί στην PA. Υπάρχουν όμως αμφισβητήσεις σχετικά με την ασάφεια της οριοθέτησης των περατοκρατικών μέσων (αντικείμενα που μελετούνται, νοηματοδοτήσεις των προτάσεων και των αντικειμένων, νομιμότητα πράξεων, αποδοχή αποδεικτικών μεθόδων). Αυτή η ασάφεια επιτρέπει τη δυνατότητα να υπάρχουν αποδεκτοί από περατοκρατική σκοπιά κανόνες, που δεν τυποποιούνται στην PA, ή ακόμη και τη δυνατότητα η περατοκρατική θεωρία να είναι εγγενώς άτυπη.

Η δεύτερη παραδοχή, προϋποθέτει την πρόταση Con(T) του Gödel να είναι μη αποκρίσιμη, ώστε να είναι μια θεωρία (του είδους που μας ενδιαφέρει) συνεπής. Ενδεχομένως όμως να υπάρχουν άλλες συμβολικές εκφράσεις της συνέπειας μιας θεωρίας, οι οποίες διαφέρουν από την Con(T) και για τις οποίες δεν υπάρχουν οι δυσκολίες που απορρέουν από το 2[ο]ΘΜΠ.

Λαμβάνοντας υπόψη τις δύο παραπάνω παραδοχές-προϋποθέσεις το συμπέρασμα του 2[ου] ΘΜΠ είναι βιώσιμο όταν:

Α) αναφέρεται σε κάθε περατοκρατική μέθοδος απόδειξης που μπορεί να τυποποιηθεί στην PA. B) Αν η συνέπεια μιας θεωρίας Τ εκφράζεται από την πρόταση Con(T), τότε η συνέπεια οποιασδήποτε συνεπούς θεωρίας που επεκτείνει την PA δεν μπορεί να αποδειχθεί με περατοκρατικά μέσα.

6.4 Παρερμηνείες των ΘΜΠ

Τα Θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel είναι από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα στη σύγχρονη λογική. Αυτές οι ανακαλύψεις έφεραν επανάσταση στην κατανόηση των μαθηματικών και της λογικής και είχαν δραματικές συνέπειες για τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Υπήρξαν επίσης προσπάθειες για την εφαρμογή τους σε άλλους τομείς της φιλοσοφίας, αλλά η γνησιότητα πολλών τέτοιων εφαρμογών είναι πολύ αμφιλεγόμενη.

Όρους όπως πληρότητα, συνέπεια, συναντά κανείς σε πολλά πεδία εντός αλλά και εκτός του χώρου των μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια[23] γίνεται μια προσπάθεια να κατανοηθούν περισσότερο τα ΘΜΠ, ώστε να αποσαφηνιστούν περισσότερο οι θέσεις του Gödel για αυτά, αλλά και τη φιλοσοφία του γενικότερα. Στην προσπάθειά τους κάποιοι μελετητές να αναφερθούν στα ΘΜΠ πέφτουν αφελώς ή όχι σε λάθη και παρανοήσεις. Αναφέρουμε μερικές περιπτώσεις, με αιτιολόγηση ως προς την εσφαλμένη τους αναφορά και ερμηνεία.

- Ίσως η πιο κοινή παρανόηση, είναι να ερμηνευτεί το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας, ως: *«υπάρχουν αλήθειες που δεν μπορούν να αποδειχθούν».* Αυτό όμως, είναι λάθος, γιατί το θεώρημα μη πληρότητας δεν ασχολείται με την

[23] Ο Hao Wang, βιογράφος και φίλος του Gödel, εξιστορεί τις φιλοσοφικές ιδέες του Gödel, στο «Reflections on *Kurt Gödel* », «*A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*», παρέχοντας έτσι στους σύγχρονους μελετητές, μια ανεκτίμητη πηγή υλικού των φιλοσοφικών σκέψεων του Gödel. Παρατηρεί όμως ότι για να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει κανείς τις απόψεις του Gödel, πρέπει να πάει πίσω στους Descartes, Leibniz και ίσως απαιτηθούν εκατοντάδες χρόνια!

αποδειξιμότητα υπό κάθε επίσημη έννοια, αλλά αφορά μόνο την ικανότητα να παραχθεί απόδειξη σε κάποιο συγκεκριμένο τυπικό σύστημα. Για οποιαδήποτε αναπόδεικτη δήλωση A σε ένα συγκεκριμένο τυπικό σύστημα F, υπάρχουν από τη μια μεριά, άλλα τυπικά συστήματα (σχετικά επαρκή) όπου η A είναι αποδείξιμη (θεωρώντας για παράδειγμα το A ως αξίωμα σε αυτά). Από την άλλη πλευρά, υπάρχει το εξαιρετικά ισχυρό πρότυπο αξιωματικό σύστημα της θεωρίας συνόλων των Zermelo-Fraenkel (ZF, ή ZFC), το οποίο είναι περισσότερο επαρκές για την παραγωγή όλων των συνηθισμένων μαθηματικών. Αλλά και πάλι υπάρχουν, σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας, αριθμητικές αλήθειες που δεν είναι αποδείξιμες, ακόμη και στο ZFC. Για να αποδειχθούν αυτές θα απαιτηθεί ένα τυπικό σύστημα που ενσωματώνει μεθόδους πέραν του ZFC. Υπάρχει έτσι μια αίσθηση με την οποία τέτοιες αλήθειες δεν είναι αποδείξιμες χρησιμοποιώντας «συνήθεις» μαθηματικές μεθόδους και αξιώματα, ούτε μπορούν να αποδειχτούν με τέτοιο τρόπο, που οι μαθηματικοί θα τον θεωρούσαν πειστικό και αδιαμφισβήτητο.

- Πολλοί θρησκευόμενοι άνθρωποι ισχυρίζονται ότι όλες οι αλήθειες θεμελιώθηκαν στη Βίβλο (μαζί με άλλα συναφή συγγράμματα) οπότε αναφέρουν ότι η Βίβλος χαρακτηρίζεται από πληρότητα επομένως είναι ένα πλήρες σύνολο αληθειών. Όμως ο Gödel μιλά για μαθηματικές αλήθειες σε αξιωματικοποιήσιμα συστήματα και η Βίβλος δεν είναι τέτοιο σύστημα. Μπορεί τα κείμενά της να είναι σε μία από τις πάμπολλες γλώσσες που μιλούν οι άνθρωποι, αλλά δεν έχει τυπική γλώσσα. Επίσης δεν έχει αξιώματα, ούτε κανόνες συμπερασμού, ούτε θεωρήματα. Τα ζητήματα με τα οποία ασχολείται η Βίβλος δεν είναι *μαθηματικής φύσης*, αλλά ζητήματα *ερμηνείας, δικαιοσύνης και πίστης*. Επομένως δεν μπορούν να εφαρμοστούν τα ΘΜΠ σε ζητήματα πληρότητας ή μη, της Βίβλου. Όπως δε αναφέρει [23] ο T. Franzén, αν αναρωτιόνταν κανείς πόσες φορές φταρνίστηκε ο Μωυσής στα πέμπτα του γενέθλια δεν θα έπαιρνε απάντηση, αφού σε κανένα σημείο της η Βίβλος δεν δίνει τέτοιες πληροφορίες, κατά συνέπεια η Βίβλος δεν είναι πλήρης.

Γενικεύοντας ο John Edwards στο ηλεκτρονικό περιοδικό «*Ceteris Paribus*» αναφέρει ότι μπορούμε να δούμε διάφορους κανόνες για τη ζωή των ανθρώπων που κωδικοποιούνται σε πολιτικές, νόμους και αρχές (όπως τα αξιώματα σε ένα λογικό σύστημα), ώστε να υπαγορεύουν αποδεκτές ενέργειες ή διαδικασίες (όπως οι προτάσεις σε ένα λογικό σύστημα). Επικείμενες ενέργειες- όπως για παράδειγμα, οι φοιτητές χρησιμοποιούν κινητά τηλέφωνα στη διάρκεια των εξετάσεων- μπορεί να θεωρηθούν ως προτάσεις. Μια τέτοια πρόταση «αποδεικνύεται», αν η ενέργεια αυτή μπορεί να γίνει αποδεκτή στο πλαίσιο του συστήματος κανόνων, ενώ διαψεύδεται όταν θεωρείται παράνομη ή απαράδεκτη. Αν υποθέσουμε ότι το νομικό σύστημα μιας κοινωνίας είναι πλήρες και συνεπές, τότε τα δικαστήρια και οι αντικρουόμενες νομικές αποφάσεις διαψεύδουν αυτόν τον ισχυρισμό. Το ίδιο θα μπορούσε να πει κανείς και για το σύνταγμα μιας χώρας, αφού πάντα υπάρχουν ασάφειες, συνταγματικά κενά, παρά τις κατά καιρούς αναθεωρήσεις του.

- Στον ισχυρισμό : «Κάθε ενδιαφέρον συνεπές αξιωματικό σύστημα είναι μη πλήρες». Η απάντηση είναι ότι η ευκλείδεια γεωμετρία (π.χ., στην κατά Hilbert αξιωματική θεμελίωση το 1899) είναι και συνεπής και πλήρης, με παρουσία δυο χιλιετηρίδων και επιτυχημένη αφού αποτέλεσε πηγή μελέτης και έμπνευσης των σπουδαιότερων μαθηματικών. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η πρωτοβάθμια θεωρία των πραγματικών αριθμών εμπλουτισμένη με στοιχεία υπερβατικών συναρτήσεων (εκθετικών τριγωνομετρικών), η οποία μπορεί να αναπτύξει μεγαλύτερο τμήμα της ανάλυσης και είναι πολύ ενδιαφέρουσα και πλήρης.
- Στον ισχυρισμό: «Κάθε συνεπές αξιωματικό σύστημα που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς είναι μη πλήρες». Η απάντηση είναι ότι η ασθενής αριθμητική Presburger[24] (απουσιάζει η πράξη του πολλαπλασιασμού), αποδεικνύει κάθε πρωτοβάθμια πρόταση που αναφέρεται μόνο στην πρόσθεση φυσικών αριθμών, είναι και συνεπής και πλήρης.

- Ο J. Bouveresse αναφέρει [9] μια δήλωση του Régis Debray: «Γνωρίζουμε με επιστημονική βεβαιότητα χάρη στο αξίωμα μη-πληρότητας, ότι *«η χειραφέτηση του ανθρωπίνου είδους είναι αυταπάτη, αιώνια και αναγκαία ...»*. Εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει την άστοχη χρήση του όρου «αξίωμα μη πληρότητας» αντί του «θεώρημα μη πληρότητας» και να διερωτηθεί κατά

---

[24] Ο μαθητής τού Tarski, ο Mojzesz Presburger το 1929 κατάφερε να αποδείξει ότι η αριθμητική του (presburger arithmetic) είναι και πλήρης και αποκρίσιμη και μη αντιφατική. Η αριθμητική αυτή περιλαμβάνει τους φυσικούς αριθμούς την πράξη της πρόσθεσης πρόσθεσή , όχι όμως του πολλαπλασιασμού. Οι πρώτοι αριθμοί δεν ορίζονται σε αυτήν και δεν είναι σε θέση να απεικονίσει όλες τις υπολογίσιμες συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς Δεν εφαρμόζεται σε αυτή το θεώρημα της μη πληρότητας τού Gödel.

πόσον η φράση «χειραφέτηση του ανθρωπίνου είδους» ευσταθεί ή μπορούσε να αντικατασταθεί με τη φράση «η ανθρώπινη σκέψη» ή με κάποιο γνωστικό χαρακτηριστικό του ανθρώπινου είδους.

- Στον ισχυρισμό: *«Δεν μπορεί να αποδειχθεί η συνέπεια της αριθμητικής»*. Η απάντηση είναι ότι το 1936, ο Gentzen δημοσίευσε μια απόδειξη της συνέπειας της πρωτοβάθμιας αριθμητικής Peano (PA), χρησιμοποιώντας, όμως, ισχυρότερα εργαλεία που δεν μπορούσαν να τυποποιηθούν στο πλαίσιο της ίδιας της PA.
- Μια άλλη συνηθισμένη επίκληση είναι: *«σύμφωνα με τα ΘΜΠ του Gödel το να καταλαβαίνουμε το μυαλό μας, είναι αδύνατο, αλλά επιμένουμε στην αναζήτηση αυτής της γνώσης δια μέσου των αιώνων»*. Όπως για άλλες αναφορές έξω από το χώρο της λογικής και των μαθηματικών και αυτή η αναφορά είναι λάθος. Με την έκφραση «σύμφωνα με» σημαίνει «όπως αναφέρεται ή όπως υπονοείται από», αλλά τα ΘΜΠ δεν δηλώνουν ούτε συνεπάγονται ότι η κατανόηση του μυαλού μας είναι αδύνατη. Αλλά όπως θεωρεί ο Douglas Hofstadter πολλές αναφορές [16] στα ΘΜΠ είναι θέμα έμπνευσης και όχι επίπτωσής τους. Τονίζει πως ένα μεταφορικό ανάλογο των ΘΜΠ είναι ότι δεν μπορούμε να κατανοήσουμε το μυαλό μας. Αναφέρει δε *«…Όπως δεν μπορούμε να δούμε το πρόσωπό μας με τα δικά μας μάτια, είναι αδιανόητο να αντικατοπτρίσουμε την πλήρη ψυχική δομή μας με τα σύμβολα που την υλοποιούν»*. Συμπεραίνει δε ότι όλα τα περιοριστικά θεωρήματα των μαθηματικών και η θεωρία του υπολογισμού, δείχνουν ότι η ικανότητα να εκπροσωπηθεί μια δομή από τον εαυτό της έχει φτάσει σε ένα ορισμένο κρίσιμο σημείο, το οποίο δεν θα ξεπερασθεί ποτέ.
- Στον ισχυρισμό: *«Κανείς δεν μπορεί να γνωρίζει ότι οι μαθηματικές θεωρίες είναι συνεπείς»*. Η απάντηση είναι ότι έχει ήδη αποδειχθεί η συνέπεια πολλών μαθηματικών θεωριών. Εκείνο που συνεπάγεται από το 2^oΘΜΠ είναι ότι πολλές πρωτοβάθμιες θεωρίες δεν μπορούν να αποδείξουν την πρόταση που εκφράζει συντακτικά τη δική του συνέπεια. Αν όμως η ίδια η θεωρία είναι ασυνεπής, τότε αποδεικνύει οποιαδήποτε πρόταση άρα, και την πρόταση που εκφράζει συντακτικά τη δική της συνέπεια. Αλλά αυτό δεν θα το θέλαμε και όπως χαρακτηριστικά αναφέρει [22] ο Raymond Smullyan: *«Το να πιστεύουμε ότι μια θεωρία είναι συνεπής επειδή αποδεικνύει την ίδια της τη συνέπεια είναι*

τόσο ανόητο όσο το να πιστεύουμε ότι ένας άνθρωπος είναι ειλικρινής επειδή ισχυρίζεται ότι δεν ψεύδεται ποτέ».

6.5 Τα ΘΜΠ και η ανθρώπινη σκέψη

Η Λογική (εισηγητής ο Frege[25]) διατυπώνει κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων από ένα σύνολο υποθέσεων και διακρίνει τον παραγωγικό από τον επαγωγικό συλλογισμό. Εστιάζεται στο θέμα της λογικής συνέπειας και όχι της αλήθειας. Δηλαδή δεν ενδιαφέρεται αν ένα συμπέρασμα είναι εμπειρικά αληθές ή όχι, αλλά αν προκύπτει από τις προϋποθέσεις που έχουν δοθεί. Από την άλλη, η Ψυχολογία της σκέψης (εισηγητής ο Αριστοτέλης[26]) προσπαθεί να περιγράψει και να εξηγήσει πώς οι άνθρωποι σκέφτονται, πώς εξάγουν συμπεράσματα σε μια διαλογική κατάσταση. Σύμφωνα με τη ψυχολογία της σκέψης, οι πεποιθήσεις καθοδηγούν τις παρατηρήσεις και οι παρατηρήσεις αλλάζουν τις πεποιθήσεις. Στην πραγματική ζωή σπανίως δεχόμαστε συμπεράσματα χωρίς να ενδιαφερθούμε για την εμπειρική αλήθεια τους. Η θεωρία του Frege παρουσιάζει ενδιαφέρον στο χώρο των Μαθηματικών, δεν είναι όμως ικανή να περιγράψει την ανθρώπινη σκέψη όπως η ψυχολογική προσέγγιση του Αριστοτέλη.

Ένα διακεκριμένο παράδειγμα όπου τα ΘΜΠ πιθανόν να μπορούν να εφαρμοστούν είναι το σύστημα της **«ανθρώπινης σκέψης»** ή αλλιώς «ανθρώπινης διάνοιας», η ακόμα «ανθρώπινου μυαλού». Δεν υπάρχουν βέβαια αξιώματα και κανόνες συμπερασμού για την «ανθρώπινη σκέψη», αλλά μπορούμε να επικαλεστούμε ειδικούς παράγοντες που αποτελούν πεδίο εφαρμογής των ΘΜΠ. Μια

---

25 Ο Frege θέλησε να αποκοπεί από τις ιδιοτροπίες της παροντικής σκέψης και να μιλήσει για την ιδανική λογική σκέψη, ασπάστηκε τον Πλατωνισμό που θεωρεί ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν στο χώρο του ιδεατού και παρόλο που είναι ανεξάρτητες από την ανθρώπινη σκέψη, είναι προσβάσιμες.

26 Στην εργασία του Αριστοτέλη, γνωστή ως «*Οργανον*» και ειδικά στο *«Περί Ιερεμία»* και στα *«Αναλυτικά Πρότερα»,* αναφέρεται η προσπάθεια πολλών Αρχαίων φιλοσόφων να ορίσουν τι μπορεί να κάνει μια επιχειρηματολογία ορθή. Τη θεωρία του Αριστοτέλη και άλλων Ελλήνων φιλοσόφων, σύμφωνα με την οποία μελετώντας τον τρόπο που επιχειρηματολογούν οι άνθρωποι, μελετάμε παράλληλα και τον τρόπο που σκέφτονται, συμμερίστηκε και ο George Boole το 1854 όταν έγραψε το βιβλίο «*Οι Νόμοι της Σκέψης*».

διατύπωση ενός τέτοιου παράγοντα κατά τον Torkel Franzén [23] είναι: «***στο βαθμό που οι άνθρωποι προσπαθούν να είναι λογικοί, οι σκέψεις τους σχηματίζουν ένα τυπικό σύστημα, στο οποίο κατ 'ανάγκην εφαρμόζεται το θεώρημα του Gödel*»**. Θα μπορούσε δηλαδή να εννοηθεί ότι στην προσπάθειά τους οι άνθρωποι να είναι λογικοί προσπαθούν να υποστηρίξουν ότι όλα τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουν, είναι οι τυπικές λογικές συνέπειες ενός συγκεκριμένου συνόλου βασικών υποθέσεων, καθορισμένων σε μία τυπική γλώσσα. Μέσα σε στενά οριοθετημένες περιοχές της σκέψης, η παραπάνω περιγραφή πράγματι ισχύει, όπως για παράδειγμα το συμπέρασμα μορφής Π: «ο φυσικός αριθμός n έχει τον παράγοντα m», το οποίο αποτελεί λογική συνέπεια κάποιων βασικών αριθμητικών αρχών. Αυτό δεν σημαίνει, ωστόσο, ότι κάποιος περιορίζεται στην εφαρμογή των λογικών κανόνων ξεκινώντας από τις βασικές αρχές για να καταλήξει στο συμπέρασμα. Προφανώς δεν θα υπήρχε κανένα λάθος, χρησιμοποιώντας χρήσιμες εμπνεύσεις ή οποιαδήποτε καινοφανή μαθηματική μέθοδο, να καταλήξουμε στον ισχυρισμό ότι η πρόταση Π είναι αληθής ή όχι (δεδομένου ότι μπορεί να ελεγχθεί). Μια πιο αυστηρή ερμηνεία του ότι «οι άνθρωποι προσπαθούν να είναι λογικοί», μπορεί να αποδοθεί τηρώντας τους τυπικούς κανόνες της λογικής (όπως ενεργώντας μηχανιστικά σε ένα αλγόριθμο), οπότε τότε η σκέψη μας είναι στενά συνδεδεμένη με ένα τυπικό σύστημα, αλλά αυτά δεν είναι τυπικές πνευματικές δραστηριότητες. Αν κάποιος εννοεί μόνο στην καθημερινή λογική του να υπάρχει συνέπεια ώστε να πάρουμε συμπεράσματα, τότε δεν μπορούμε να επισημάνουμε κάποια ιδιαίτερη σχέση των τυπικών συστημάτων με την σκέψη μας.

Τα τυπικά συστήματα μελετούνται και εφαρμόζονται στο πλαίσιο των μαθηματικών και στον προγραμματισμό υπολογιστών και όχι σε πολιτικές συζητήσεις, σε νομικά επιχειρήματα, ούτε στην επίλυση προβλημάτων στην καθημερινή ζωή. Ακόμα και όταν ενεργούμε τελείως υπολογιστικά η έκφραση «οι σκέψεις μας αποτελούν ένα τυπικό σύστημα» είναι μεταφορική. Ας δεχτούμε τώρα ότι το θεώρημα μη πληρότητας εφαρμόζεται ουσιαστικά μόνο για την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων, και όχι στο πλαίσιο, μιας φιλοσοφικής ή πολιτική συζήτησης. Όμως οι άνθρωποι αποδεικνύουν μαθηματικά ζητήματα και συγκεκριμένα αριθμητικά. Ας θεωρήσουμε ότι η «ανθρώπινη σκέψη» όσον αφορά την απόδειξη των αριθμητικών δηλώσεων, δεν δεσμεύεται από τα ΘΜΠ. Αναρωτιέται όμως ο Torkel Franzén [23], δεν είμαστε υποχρεωμένοι τότε να υποθέσουμε ότι υπάρχει κάτι ουσιαστικά μη υπολογίσιμο στην ανθρώπινη μαθηματική σκέψη, το οποίο επιτρέπει την υπέρβαση των περιορισμών των υπολογιστών και των τυπικών συστημάτων και ίσως ακόμη την υπέρβαση και κάποιας μειούμενης πνευματικής, μη υλικής συνιστώσας της ανθρώπινης σκέψης; Ένα τέτοιο αποτέλεσμα θα ήταν ευπρόσδεκτο και τείνει να επηρεάσει το πώς οι άνθρωποι βλέπουν τις προσπάθειες εφαρμογής των ΘΜΠ στην ανθρώπινη σκέψη.

Όταν μιλάμε για το θεώρημα μη πληρότητας και τη δυνατότητα εφαρμογής του στην ανθρώπινη σκέψη, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αν οι άνθρωποι είναι εξελιγμένοι, διαθέτοντας για παράδειγμα «ποζιτρονικό εγκέφαλο» ή αν αντίθετα είναι «κατώτερα» πνευματικά πλάσματα που υπερέχουν έναντι όλων των μηχανισμών. Αν η ανθρώπινη σκέψη περιορίζεται ή όχι από το θεώρημα μη πληρότητας, έγκειται στο ότι μπορούμε λογικά να μιλάμε για «τι μπορεί το ανθρώπινο μυαλό να αποδείξει» στην αριθμητική. Θεωρώντας ως σύνολο M τις αριθμητικές δηλώσεις που είναι « ανθρωπίνως αποδείξιμες», αναρωτιέται κανείς αν το M είναι υπολογίσιμα αριθμήσιμο. Αν είναι, τότε «το ανθρώπινο μυαλό» υπόκειται στο θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel, οπότε υπάρχουν αριθμητικές δηλώσεις που δεν είναι «ανθρωπίνως δυνατό να αποφασισθούν» (δεδομένου ότι η «ανθρώπινη σκέψη» είναι συνεπής). Αν το M δεν είναι υπολογίσιμα αριθμήσιμο τότε, η ανθρώπινη σκέψη ξεπερνά τη δύναμη του τυπικού συστήματος και υπό αυτή την έννοια, δεν περιορίζεται από το θεώρημα μη πληρότητας. Το κατά πόσον ή όχι το M είναι υπολογίσιμα αριθμήσιμο, δημιουργεί ένα προκλητικό και άκρως σημαντικό πρόβλημα και η απάντησή του θα ήταν πάρα πολύ ενδιαφέρουσα και διαφωτιστική.

Αλλά κατά τον Torkel Franzén η ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου M είναι αβάσιμη και έχει πολύ μικρή δυνατότητα για να υποστηριχτεί και στην πραγματικότητα το ανθρώπινο μυαλό είναι φυσικά περιορισμένο από πλευράς ποσότητας χρόνου και ενέργειας. **Το γεγονός της διακύμανσης και της δυνατότητας σφυρηλάτησης του «ανθρώπινου μυαλού» καθιστά εξαιρετικά απίθανο να υπάρχει μια θεωρία που να εξετάζει τι είναι θεωρητικά δυνατόν να αποδείξει «το ανθρώπινο μυαλό».**

Στο ζήτημα τώρα τι έχει αποδείξει «το ανθρώπινο μυαλό», υπάρχουν έντονες διαφοροποιήσεις που εστιάζονται κυρίως στη μη πεπερασμένη (infinitistic) φύση της θεωρίας συνόλων, όπου κάποια ανθρώπινα μυαλά έχουν απορρίψει μερικά αποτελέσματά της σαν ανούσια, ενώ άλλοι τα βρίσκουν πολύ πειστικά και διαισθητικά. Χρειάζεται μια συμφωνία σχετικά με το τι είναι ή δεν είναι μια απόδειξη, ώστε να υφίσταται το ερώτημα τι μπορεί να αποδείξει το «ανθρώπινο μυαλό». Χωρίς ένα θεωρητικό χαρακτηρισμό όλων των «πιθανών αποδείξεων», και χωρίς διασαφήνιση σχετικά με το ποιά υπάρχοντα επιχειρήματα είναι αποδείξεις, δεν μπορούμε να ρωτήσουμε τι μπορεί να αποδείξει «ο ανθρώπινος νους» με τη χρήση ορισμένων τυπικά καθορισμένων μεθόδων συλλογισμού. Τότε, τίθεται το ερώτημα τι είναι αποδείξιμο σε ορισμένα τυπικά συστήματα.

Η δυνατότητα σφυρηλάτησης του ανθρώπινου νου, είναι εφικτή κατά τον Errett Bishop[8], ο οποίος υποστήριξε και εργάστηκε στα κατασκευαστικά (constructive) μαθηματικά και αναφέρθηκε για *«την αναπόφευκτη ημέρα όπου τα κατασκευαστικά μαθηματικά θα είναι η αποδεκτή πρακτική»*. Για το ανθρώπινο μυαλό είναι απόλυτα κατανοητό, ότι το αποδεκτό μαθηματικό πρότυπο πιθανόν να είναι στο μέλλον τα κατασκευαστικά μαθηματικά του Errett Bishop. Βέβαια είναι εξίσου κατανοητό ότι οι άνθρωποι μπορούν να πείσουν τους εαυτούς τους με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, για την αποδοχή των ακραίων μη κατασκευαστικών αρχών που δεν θεωρούνται προφανείς από κανέναν σήμερα.

Με αυτή την έννοια, τότε μπορεί να μην υπάρχει καθόλου όριο σχετικά με την «ικανότητα του ανθρώπινου μυαλού» για την απόδειξη θεωρημάτων. Αλλά φυσικά δεν υπάρχει τίποτα να αποκλείσει το ενδεχόμενο ότι ψευδείς δηλώσεις θα θεωρηθούν ως αποδεδειγμένες επειδή οι αρχές που δεν είναι στην πραγματικότητα αριθμητικά βάσιμες θα θεωρηθούν ως προφανείς. Το ζήτημα της πραγματικής ή δυνητικής εμβέλειας του ανθρώπινου μυαλού, όταν αυτό πρόκειται να αποδείξει θεωρήματα της αριθμητικής, δεν μπορεί να διευθετηθεί, αφού δεν έχουμε τα απαραίτητα εργαλεία, για να είμαστε σε θέση ώστε συνετά να θέτουμε μεγάλες θεωρητικές ερωτήσεις, σχετικά με το τι μπορεί να αποδειχθεί από το «ανθρώπινο μυαλό».

6.6 Μηχανές Turing, υπολογισιμότητα και ΘΜΠ

Η ιδέα της τυπικής λογικής συναντάται από τον καιρό των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων, αλλά η μαθηματική της ανάπτυξη ξεκίνησε ουσιαστικά με την εργασία του George Boole, ο οποίος επεξεργάστηκε τις λεπτομέρειες της προτασιακής λογικής. Ο Boole μελέτησε αλγόριθμους λογικής παραγωγής συμπεράσματος (logical deduction) και προς το τέλος του 19ου αιώνα γίνονταν προσπάθειες να τυποποιηθεί η γενική μαθηματική συλλογιστική, ως λογική παραγωγή συμπερασμάτων.

Το 1900, ο David Hilbert παρουσίασε έναν κατάλογο 23 προβλημάτων τα οποία, όπως σωστά πρόβλεψε, θα απασχολούσαν τους μαθηματικούς για το μεγαλύτερο μέρος του αιώνα. Δύο από αυτά αφορούν την υπολογισιμότητα με πεπερασμένα μέσα, όπως το «πρόβλημα της απόφασης[27]» (Entscheidungsproblem) και το δέκατο πρόβλημα[28].

Δημιουργήθηκε η ανάγκη χρήσης αλγορίθμων για τη λύση αυτών των σπουδαίων μαθηματικών προβλημάτων. Η αποτυχία ωστόσο προγενέστερων προσπαθειών να βρεθούν αυτοί οι αλγόριθμοι, έκανε πολλούς μαθηματικούς να υποπτεύονται μήπως στην πραγματικότητα δεν υπήρχαν αλγόριθμοι για τη λύση αυτών των προβλημάτων.

Το ΘΜΠ του Gödel έγινε γενικά αποδεκτό από την μαθηματική κοινότητα ως ένδειξη της μη πληρότητας όλων των αυστηρά αποδείξιμων συστημάτων. Η διαισθητική αντίληψη ενός γενικευμένου αυστηρού συστήματος, απαιτούσε την απόδειξή του με πεπερασμένα μέσα μέσω μιας «μηχανιστικής μεθόδου». Η μηχανιστική μεθόδος που απαιτούνταν για να λυθεί κάτι, προϋπόθετε μια ακριβή διατύπωση όσον αφορά το τί είναι μηχανιστική υπολογισιμότητα. Το 1936 ξεκίνησε η ανεξάρτητη ανάπτυξη τριών ισχυρών μοντέλων υπολογισιμότητας, που οδήγησαν στον λογισμό «λάμδα» (the lamda calculus) του A.Church,τις αναδρομικές συναρτήσεις[29] (recursive functions) του Kleene και τις μηχανές Turing.

Και τα τρία μοντέλα έδωσαν την δυνατότητα να αποφασίζουμε ποιές συναρτήσεις είναι υπολογίσιμες και η διαφοροποίησή τους έγκειται μόνο στο πώς θα ελέγχεται η υπολογισιμότητα. Από τα τρία αυτά μοντέλα η μηχανιστική δράση των μηχανών Turing ήταν αυτή που ταίριαζε με τη διαισθητική προσέγγιση των ανθρώπων για την αντίληψη των υπολογίσιμων μαθηματικών συναρτήσεων. Ο Turing έδωσε ένα «εγχειρίδιο οδηγιών» για την κατασκευή της μηχανής- συσκευής, έτσι ώστε να υπάρχει μια τυποποίηση για τη μελέτη της υπολογισιμότητας. Η σύνδεση μεταξύ της αφηρημένης υπολογισιμότητας και της φυσικής

---

[27] το ερώτημα ήταν αν υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να αποφασίσει την αλήθεια οποιασδήποτε λογικής πρότασης που αφορούσε τους φυσικούς αριθμούς Ουσιαστικά, αυτό που έθεσε ο Hilbert ήταν αν υπάρχουν θεμελιώδη όρια στην ισχύ των αποτελεσματικών διαδικασιών απόδειξης

[28] Βρείτε έναν αλγόριθμο ώστε να καθορίσετε εάν κάθε δοσμένη πολυωνυμική Διοφαντική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει ακέραια λύση. Το 1970, ο Yuri Matiajevic απέδειξε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αλγόριθμος.

[29] Ο πρώτος αυστηρός ορισμός των αναδρομικών συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς δόθηκε από τον Gödel το 1934, με βάση μια ιδέα του Herbrand και τα θεμελιακά αποτελέσματα για τις αναδρομικές συναρτήσεις αποδείχθηκαν από τον Kleene στην δεκαετία του 1930. Αυτή η πρόσβαση στην θεωρία αναδρομής βασίζεται σε ιδέες από την λογική και τον προγραμματισμό.

υπολογισιμότητας που προκύπτει από μια μηχανή Turing, έγινε γρήγορα το κλασικό μοντέλο υπολογισιμότητας

Η μηχανή Turing είναι ακριβώς ο τύπος του μοντέλου που αναζητούσε ο Gödel για να παρουσιάσει τα αυθαίρετα τυπικά συστήματά του (arbitrary formal systems). Σε ένα υστερόγραφο των διαλέξεων του, το 1934, ο Gödel εκθειάζει τις μηχανές Turing διότι επιτρέπουν έναν ακριβή και αδιαμφισβήτητο ορισμό της γενικής ιδέας ενός τυπικού συστήματος. Με τη βοήθεια της έρευνας του Turing πάνω στην υπολογισιμότητα, τα τυπικά συστήματα μπορούν να προσδιοριστούν σαν Turing μηχανές που ημι-υπολογίζουν ένα σύνολο τύπων που θεωρούνται αποδεδειγμένοι. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αναδρομικά αριθμήσιμο σύνολο αξιωμάτων, με αναδρομικά αριθμήσιμους κανόνες παραγωγής συμπεράσματος (rules of inference).

Το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel μπορεί λοιπόν να γίνει εντελώς συγκεκριμένο, λέγοντας ότι κανένα συνεπές τυπικό σύστημα (consistent formal system) αυτής της μορφής δεν μπορεί να αποδείξει όλες τις αλήθειες της αριθμητικής, ή αλλιώς, ότι ένα σύνολο αληθών τύπων της αριθμητικής δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμο. Η απόδειξη του Alan Turing περί μη υπολογισιμότητας της συνάρτησης τερματισμού από τις μηχανές του και η απόδειξη του Alonzo Church ότι το πρόβλημα του λογισμού λάμδα είναι επίσης μη αποφασίσιμο, επέκτειναν το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel. Στα αποτελέσματα του Turing αναγνωρίζουμε βέβαια ότι κατασκεύασε μια θεωρία υπολογισμού που έδινε τη δυνατότητα μιας βαθιάς κατανόησης των αλγοριθμικών διαδικασιών Από την άλλη, ο Turing έφερε κάποια ανησυχητικά αποτελέσματα για τα θεμέλια των μαθηματικών, δείχνοντας ότι η μη αποφασισιμότητα (undecidability) στα μαθηματικά ήταν πολύ πιο εκτεταμένη από όσο είχε φανεί στο παρελθόν.

Ο Gregory Chaitin, ψάχνει ακόμα πιο βαθιά στα θεμέλια των μαθηματικών, δείχνοντας πως τα μαθηματικά είναι γεμάτα τυχαιότητα, αινίγματα και παράδοξα. Όρισε μια πιθανότητα τερματισμού, που αναπαριστάται από το σύμβολο Ω, ένα είδος πραγματικού αριθμού που ανεπίσημα δηλώνει την πιθανότητα τερματισμού ενός τυχαίου προγράμματος. Αυτός ο αριθμός έχει τον ίδιο βαθμό Turing όπως το πρόβλημα τερματισμού. Είναι ένας κανονικός και υπερβατικός αριθμός που μπορεί να προσδιορισθεί, αλλά δεν μπορεί να υπολογιστεί. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που να παράγει όλα τα ψηφία του Ω αλλά μόνο μερικά αρχικά.

Τα αποτελέσματα του Chaitin μπορούν να θεωρηθούν σαν προεκτάσεις των αποτελεσμάτων των Gödel και Turing στο ότι εντάσσουν όχι μόνο την μη-πληρότητα στην καρδιά της επιστήμης των μαθηματικών, αλλά και την τυχαιότητα. Ο ίδιος ο Chaitin στο βιβλίο του «*The Unknowable*» αναφέρει [10]:

> «Εν συντομία ο Gödel ανακάλυψε τη μη πληρότητα, ο Turing ανακάλυψε τη μη υπολογισιμότητα, και εγώ ανακάλυψα την τυχαιότητα, αυτό είναι το εκπληκτικό γεγονός, ότι ορισμένες μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς χωρίς λόγο, είναι αληθείς από ατύχημα».

Όμως τα αποτελέσματα του Gödel έχουν παρερμηνευτεί και σε αυτόν τον τομέα. Στον πρόλογο του βιβλίου του Davis «*The Undecidable*» αναφέρεται [11] ότι *«ο Gödel απέδειξε ότι τα λογικά συστήματα, όσο ικανά και αν είναι, δεν μπορούν πάντα να δίνουν αποδείξεις για όλους τους αληθείς ισχυρισμούς της αριθμητικής»*. Όμως ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δόθηκε αφελώς απρόσεκτα, και είναι ενδεικτικός για την μη πλήρη αποσαφήνιση των αποτελεσμάτων του Gödel. Αυτό που πραγματικά έδειξε ο Gödel είναι, ότι κανένα τυπικό σύστημα ισοδύναμης ισχύος με την μηχανή Turing δεν μπορεί να υπολογίσει όλες τις αλήθειες της αριθμητικής.

Οι περιορισμοί που παρουσιάστηκαν στα αποτελέσματα των Gödel, Turing και Chaitin είναι όλοι σχετικοί με τις μηχανές Turing. Δεν αποκλείεται όμως στο μέλλον να καταστεί δυνατό να αποφασιστεί η αλήθεια αυθαίρετων αριθμητικών προτάσεων και να λυθεί η συνάρτηση τερματισμού.

Η δυσκολία αυτών των προβλημάτων έχει διαπιστωθεί, τώρα πρέπει να ανακαλυφθεί εάν το σύμπαν[30] έχει αρκετούς πόρους για να τα υπολογίσει. Οι ιδέες των Gödel , Turing και Chaitin είναι πολύ σχετικές μεταξύ τους και εκτός του ότι δείχνουν τα όρια των μηχανών Turing, υποδεικνύουν και τη μέθοδο εύρεσης άλυτων προβλημάτων για κάθε δοσμένο τύπο μηχανής. Προφανώς θα βρεθούν ανάλογες περιπτώσεις μη-πληρότητας, μη-αποφασιστικότητας και τυχαιότητας σχετικές με πιο ισχυρές εφαρμόσιμες μηχανές, ότι μηχανές και αν είναι. Περιορισμοί της μαθηματικής μας γνώσης υπήρχαν και θα υπάρχουν, αλλά μάλλον θα ήταν ένα καλό βήμα να βρεθούν συγκεκριμένα παραδείγματα σε σχέση με τους φυσικούς μας νόμους, τα οποία θα είναι μη-πλήρη, μη-υπολογίσιμα ή τυχαία.

---

[30] Ένας σύγχρονος επιστήμονας, ο Edward Fredkin, θεωρεί ότι τα θεμελιώδη σωματίδια της φύσης είναι bits πληροφορίας στο σύμπαν , θεωρώντας το σαν μια τεράστια μηχανή-υπολογιστή, αναφέρεται στο βιβλίο του Robert Wright: *«Three Scientists and Their Gods*».

6.7 Gödel +UTM

Μια από τις πιο διαδεδομένες παρανοήσεις σχετικά με το πρώτο ΘΜΠ, όταν αυτό εφαρμόζεται σε ένα συνεπές σύστημα, είναι ότι η απόδειξη του, δείχνει ότι η G πρόταση είναι αληθής και δεν αποδεικνύεται αποκλειστικά με τους πόρους του συστήματος. Ο Rudy Rucker στο βιβλίο του *Infinity and mind* λέει την παρακάτω ιστορία την οποία όμως ο Torkel Franzén θεωρεί παραπλανητική.

1. Κάποιος δείχνει στον Gödel μια UTM (Universal Truth Machine), η οποία υποτίθεται ότι μπορεί να απαντήσει σωστά την οποιαδήποτε ερώτηση της τεθεί.
2. Έστω P(UTM) το πρόγραμμα βάσει του οποίου δουλεύει η UTM.
3. Ο Gödel τώρα δίνει την εξής πρόταση: **G = «Η μηχανή αυτή που κατασκευάστηκε βάσει του προγράμματος P(UTM) δεν θα πει ποτέ ότι αυτή η πρόταση είναι αληθής**». Δηλαδή ισοδύναμα δίνεται η πρόταση **«η UTM δεν θα πει ποτέ ότι η G είναι αληθής.»**
4. Τώρα ο Gödel μειδιώντας ρωτά την UTM αν η G είναι αληθής ή ψευδής.
5. Αν η UTM απαντήσει ότι η G είναι αληθής, τότε η πρόταση «η UTM δεν θα πει ότι η G είναι αλήθεια» είναι ψευδής. Αν τώρα είναι ψευδής η πρόταση «η UTM δεν θα πει ποτέ ότι η G είναι αλήθεια, τότε η G είναι ψευδής. Επομένως αν η UTM πει ότι η G είναι αλήθεια, τότε η G θα είναι στην πραγματικότητα ψευδής, και η UTM θα έχει κάνει μια ψευδή δήλωση. Οπότε η UTM δεν θα πει ότι η G είναι αλήθεια, καθώς η UTM κάνει μόνο αληθείς δηλώσεις.
6. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η UTM δεν θα πει ποτέ ότι η G είναι αλήθεια. Οπότε η πρόταση «η UTM δεν θα πει ποτέ ότι η G είναι αλήθεια» είναι στην πραγματικότητα μια αληθής δήλωση. Οπότε η G είναι αληθής (καθώς G= «η UTM δεν θα πει ποτέ ότι η G είναι αλήθεια).
7. «*Γνωρίζω μια αλήθεια που η UTM δεν μπορεί ποτέ να εκστομίσει»*, είπε τότε ο Gödel και συνεχίζει *«Γνωρίζω ότι η G είναι αληθής, η UTM δεν είναι πραγματικά καθολικά αληθής»*.

Σε αυτό το σημείο σταματούν οι διάλογοι του Rudy Rucker. Όμως Torkel Franzén επινοεί την εξής συνέχεια: Η UTM αναγγέλλει σοβαρά : *«Ανακοινώνω δια* *του παρόντος ότι η G είναι αληθής»,* αλλά ο Gödel της λέει : *«υποτίθεται λες πάντα την αλήθεια»*, οπότε του απαντά η μηχανή: *«από ότι φαίνεται δεν τη λέω»* !.

Αν η UTM είναι στην πραγματικότητα μια μηχανή που λέει πάντα αλήθεια, τότε ο τελικός διάλογος δεν θα είχε συμβεί. Ο Gödel δεν έχει αποδείξει ακόμα ότι γνωρίζει κάποια αλήθεια που η UTM δε μπορεί να πει. Αυτό που ξέρει είναι ο υπαινιγμός: «αν η UTM πάντα λέει αλήθεια, τότε η G είναι αληθής». Μόνο αν με κάποιο τρόπο έχει αποκτήσει τη γνώση ότι η UTM πάντα λέει αλήθεια, θα ισχύει το γεγονός ότι γνωρίζει την αλήθεια για την G.

Καταλήγει ο Torkel Franzén τονίζοντας ότι το να λέγεται ότι η UTM είναι μηχανή καθολικής αλήθειας, δεν ισοδυναμεί με τη γνώση (σίγουρη πληροφορία) ότι η UTM είναι μηχανή καθολικής αλήθειας

6.8 ΘΜΠ, αυτοαναφορικές προτάσεις, λογικά παράδοξα

Τα λογικά παράδοξα εμφανίστηκαν στην Αρχαία Ελλάδα με τον Κρητικό φιλόσοφο Επιμενίδη να αναφέρει: *«όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες»,* τον φιλόσοφο Ευβουλίδη να γράφει: «*κάποιος λέει ότι ψεύδεται, λέει αλήθεια ή ψέματα»;* Ακόμα αυτοαναφορική θεωρείται και η κλασσική πρόταση του Σωκράτη *«Έν οίδα, ότι ουδέν οίδα».* Αλλά και στην εξέλιξη της ιστορίας των μαθηματικών εμφανίστηκαν εκτός από τα παράδοξα του Russell και άλλες περιπτώσεις αυτοαναφοράς. Για παράδειγμα το 1828, στο λεξικό του Webster κάποιες λέξεις[31] ορίζονταν η μία μέσω της άλλης, δημιουργώντας μια κυκλική αναφορά. Ο Wittgenstein [29]το 1958 στο βιβλίο του «*Blue book*», το οποίο αφορούσε διαλέξεις του από το 1929 στο Cambridge, σημείωνε πως το γεγονός ότι κάθε λέξη ορίζεται με τη χρήση άλλων λέξεων, καθιστά ένα λεξικό ανεπαρκές.

Ο ίδιος ο Wittgenstein έγραψε πολλά κείμενα για τα ΘΜΠ, θεωρώντας ότι έχουν μικρό αντίκτυπο στο χώρο της λογικής, λόγω της αυτοαναφοράς τους, χωρίς να βλέπει τις μεταμαθηματικές προτάσεις σαν μαθηματικά αποτελέσματα. Οι Bernays, Dummett, and Kreisel, ξεχωριστά ο καθένας, έκαναν αρνητικές αξιολογήσεις στις κριτικές του Wittgenstein. Ο Wang [27] το 1996 αναφέρει ότι ο Gödel αναρωτιόνταν (σε επιστολή του προς τον Karl Menger) για τον Wittgenstein, μήπως είχε χάσει τη λογική του, αφού θεωρούσε ότι τα ΘΜΠ στηρίζονταν σε λογικό παράδοξο.

[31] Για παράδειγμα οι λέξεις regain (επανακτώ) και recover (ξαναπαίρνω).

Ο Gödel στο άρθρο του, το 1931, σε μια υποσημείωση ανέφερε ότι κάθε παράδοξο αυτοαναφοράς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του ΘΜΠ. Αυτό που Gödel έξυπνα ανακάλυψε ήταν ότι οι τυπικές θεωρίες μπορούν να αντανακλώνται στο εσωτερικό τους, δεδομένου ότι οι αριθμοί μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να αναφέρονται σε τύπους μέσω της χρήσης ενός συστήματος κωδικοποίησης, με συμβολισμό «⌜ ⌝» και με τη βοήθεια αυτών των τύπων η αποδειξιμότητα μπορεί να επαναδιατυπωθεί στο εσωτερικό των θεωριών, ως αριθμητική ιδιότητα.

Πολλά παράδοξα που στηρίζονται σε αυτοαναφορά, δεν θεωρούνται αξιόπιστες συλλογιστικές ενέργειες αφού οδηγούν σε λογική αντίφαση. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το παράδοξο του Γάλλου Jules Richard που διατύπωσε το 1905. **Θεωρούμε τις αριθμητικές ιδιότητες να μπορούν να εκφράζονται και να διατυπώνονται με στοιχειώδη σύμβολα της αριθμητικής**. Έτσι ο ορισμός, του να είναι ένας φυσικός αριθμός πρώτος, ορίζεται ως $Π_1$: «μη διαιρετός από κανέναν παρά από το 1 και τον εαυτό του», ενώ το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού ορίζεται ως $Π_2$: «το γινόμενο ενός φυσικού επί τον εαυτό του». Κάθε τέτοιος ορισμός περιλαμβάνει πεπερασμένο πλήθος λέξεων άρα και πεπερασμένο πλήθος γραμμάτων. Το πλήθος των γραμμάτων κάθε ορισμού έστω ότι είναι το κριτήριο ώστε να βάλουμε όλους τους ορισμούς σε μια αύξουσα σειρά (αν έχουμε ίδιο πλήθος τότε λαμβάνουμε υπόψη την αλφαβητική σειρά). Η **κωδικοποίηση** είναι η αντιστοίχιση του κάθε ορισμού σε ένα φυσικό αριθμό. Αν υποθέσουμε τώρα ότι στον $Π_1$ αντιστοιχεί ο 17 τότε λέμε ότι ο 17 έχει την ιδιότητα του αντίστοιχου ορισμού, ενώ αν στον $Π_2$ αντιστοιχεί ο 15, λέμε ότι ο 15 δεν έχει την ιδιότητα του αντίστοιχου ορισμού.

Ορίζουμε τώρα**: «ο x είναι αριθμός Richard»** όταν δεν έχει την ιδιότητα του ορισμού στον οποίο αντιστοιχεί και αυτός ο ορισμός συμπληρώνει την κωδικοποίηση που κάναμε παραπάνω. Έτσι ο 17 δεν αριθμός Richard αφού αποτελεί ιδιότητα της $Π_1$, ενώ ο 15 είναι αριθμός Richard, αφού δεν αποτελεί ιδιότητα της Π1. Θεωρούμε τώρα ότι ο n είναι ο φυσικός που αντιστοιχεί στην έκφραση **Π:«ο n είναι αριθμός Richard» που είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής.** Πράγματι αν ο n είναι αριθμός Richard, τότε έχει την ιδιότητα στην οποία αναφέρεται, άρα δεν είναι αριθμός Richard, ενώ αν υποθέσουμε τώρα ότι ο n δεν είναι αριθμός Richard, τότε αφού δεν έχει την ιδιότητα στην οποία αναφέρεται είναι αριθμός Richard. Η αντίφαση όμως αυτή δεν είναι λογική σύμφωνα με την κωδικοποίηση που κάναμε, αφού η Π δεν είναι κάποιος ορισμός αριθμητικής ιδιότητας. Δηλαδή η έκφραση Π δεν αποτελεί μέρος της κωδικοποίησης που ορίσαμε, παρά το ότι αναφέρεται στην κωδικοποίηση. Κατά μια έννοια λέμε ότι η Π είναι μια μεταμαθηματική πρόταση που δεν μπορεί να «καθρεφτιστεί ή να απεικονιστεί ή να μιλήσει» στον εαυτό της.

Το κλειδί της συλλογιστικής του Gödel ήταν ότι **κατάφερε να δημιουργήσει μια μεταμαθηματική πρόταση που η ίδια αντιπροσωπεύονταν σε ένα τυποποιημένο αριθμητικό λογισμό.**

Η τυποποίηση ενός παραδόξου σημαίνει την ανακατασκευή του μέσα μια τυπική θεωρία (στην περίπτωσή μας, μια θεωρία πρώτης τάξης). Αυτό συνεπάγεται την εξεύρεση τυπικού αντίστοιχου για καθένα από τα στοιχεία που συμμετέχουν στην άτυπη μορφή του παράδοξου. Το τυπικό αντίστοιχο –που είναι κομμάτι του συλλογισμού μας- θα είναι μια τυπική απόδειξη και το τυπικό αντίστοιχο μιας τέτοιας παραδοχής θα είναι ένα αξίωμα. Έτσι, και το τυπικό αντίστοιχο ενός παραδόξου θα είναι ένα κομμάτι του συλλογισμού που οδηγεί σε μια λογική αντίφαση και αυτό θα είναι μια τυπική απόδειξη της ασυνέπειας της εν λόγω θεωρίας.

Ας τυποποιήσουμε τώρα ένα παράδοξο που η αυτοαναφορά του μπορεί να τεθεί στην ακόλουθη μορφή: «αυτή η πρόταση έχει την ιδιότητα P» (1)

Η αξίωση της αυτοαναφοράς μιας τέτοιας πρότασης είναι ο όρος «αυτή η πρόταση» να παραπέμπει στην ίδια πρόταση. Άλλος τρόπος για να δηλώσουμε αυτή την παραδοχή είναι να πούμε ότι η (1) οφείλει να ικανοποιεί την παρακάτω ισοδυναμία: **αυτή η πρόταση έχει την ιδιότητα P⇔« αυτή η πρόταση έχει την ιδιότητα P» έχει την ιδιότητα P.** (2). Αυτό γίνεται αντικαθιστώντας τον όρο «αυτή η πρόταση» με ολόκληρη την ίδια την πρόταση, χωρίς να αλλάζει το νόημα της πρότασης. Τυπικά αυτή η παραδοχή μπορεί να εκφραστεί από το σχήμα[32] $\mathbf{P(t) \leftrightarrow P(\ulcorner P(t) \urcorner)}$ **(3),** όπου το t υποδηλώνει τον όρο «αυτή η πρόταση». Αυτό είναι αντίστοιχο της ισοδυναμίας (2), όπου ο όρος «αυτή η πρόταση», αντικαταστάθηκε από το t και τα εισαγωγικά αντικαταστάθηκαν από τον συμβολισμό $\ulcorner \urcorner$.

Το παράδοξο του ψεύτη είναι η αντίφαση που αναδύεται όταν προσπαθούμε να προσδιορίσουμε αν η πρόταση**: «αυτή η πρόταση δεν είναι αληθής»** είναι αληθής ή ψευδής (γνωστή ως Liar πρόταση). Το παράδοξο του ψεύτη επίσης

[32] Όταν μια θεωρία έχει ένα κατηγόρημα T ώστε $T(\varphi)\leftrightarrow\varphi$ για κάθε πρόταση φ, τότε λέμε ότι περιλαμβάνει ένα σχήμα T, το οποίο είναι γνωστό και ως σχήμα Tarski και αποτελεί μια «ενοποιητική αρχή» όλων των διαφορετικών εμφανίσεων περιπτώσεων αυτοαναφοράς.

στηρίζεται στον ισχυρισμό ότι η γλώσσα μας έχει ένα αληθές κατηγόρημα. Το τυπικό αντίστοιχο αυτής της παραδοχής είναι ότι η ίδια η θεωρία περιλαμβάνει ένα σχήμα T.

Για παράδειγμα στη Liar πρόταση, P είναι η ιδιότητα «όχι αληθής».
Αν ωστόσο στην (3) δηλώσουμε σαν P την $\neg T(x)$, τότε στη θεωρία που αποτελείται από το σχήμα T και την (3) παίρνουμε την ακόλουθη απόδειξη.

1. $\neg T(t) \leftrightarrow \neg T(\ulcorner\neg T(t)\urcorner)$, λόγω της (3) και το ότι η P είναι $\neg T$

2. $T(\ulcorner\neg T(t)\urcorner) \leftrightarrow \neg T(t)$, από το σχήμα T

3. $T(\ulcorner\neg T(t)\urcorner) \leftrightarrow \neg T(\ulcorner\neg T(t)\urcorner)$, από 1, 2

Αυτό αποδεικνύει ότι η θεωρία που αποτελείται από την (3) και το σχήμα T, είναι μη συνεπής, το οποίο είναι η τυπική θεώρηση του παραδόξου του ψεύτη.
Ας δούμε τώρα πως το σχήμα T σχετίζεται με το πρώτο ΘΜΠ του οποίου μια απλή εκδοχή είναι: **Αν η PA είναι ω-συνεπής, τότε είναι μη πλήρης.** Για να το αποδείξουμε, δείχνουμε ότι η παραδοχή, ότι αν η PA είναι ω-συνεπής και πλήρης, οδηγεί σε αντίφαση. Στη βάση της τυποποίησης των παραδόξων που θεωρήσαμε, μπορεί να δειχθεί ότι αν η PA είναι ω-συνεπής και πλήρης, τότε κάποιο παράδοξο θα είναι ικανό να τυποποιηθεί στην PA. Αυτό περίπου είναι η ιδέα του Gödel, η απόδειξή του χρησιμοποιεί μια αντίστοιχη αριθμητική πρόταση όπου το «αληθής» αντικαταστάθηκε με το «αποδείξιμη». Κατασκεύασε ένα τύπο Bew (Beweis) στην τυπική του θεωρία, ικανοποιώντας για όλα τα φ και n, ότι η ισοδυναμία $\boldsymbol{\vdash Bew(\bar{n},\ulcorner\varphi\urcorner)\leftrightarrow n}$ δηλώνει μια απόδειξη της φ, (4) όπου $\bar{n}$ είναι το αριθμητικό του n στην τυπική του θεωρία.

Υποθέτοντας ότι η θεωρία είναι ω-συνεπής και πλήρης, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\boldsymbol{\vdash\exists x Bew(x,\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \vdash\varphi}$ για κάθε πρόταση φ. Πράγματι: αν $\vdash\exists x Bew(x,\lceil\varphi\rceil)$, τότε λόγω της ω-συνέπειας υπάρχει κάποιο n ώστε $\nvdash\neg Bew(\bar{n},\ulcorner\varphi\urcorner)$.
Λόγω πληρότητας έχουμε $\vdash Bew(\bar{n},\ulcorner\varphi\urcorner)$ για αυτό το n. Η (4) μας εξασφαλίζει ότι το n δηλώνει μια απόδειξη της φ.
Αντίστροφα: Αν$\vdash\varphi$ τότε από την (4) θα υπάρχει n ώστε $\vdash\neg Bew(\bar{n},\ulcorner\varphi\urcorner)$, επομένως παίρνουμε $\vdash\exists x Bew(x,\ulcorner\varphi\urcorner)$. Τώρα σε μια πλήρη θεωρία $\vdash\exists x Bew(x,\ulcorner\varphi\urcorner)\leftrightarrow\vdash\varphi$ σημαίνει $\vdash\exists x Bew(x, \ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow\varphi$. Αν συντμήσουμε τον τύπο $\vdash\exists x Bew(x,\lceil\varphi\rceil)$ με

T(⌜φ⌝), τότε έχουμε ⊢T(⌜φ⌝) ↔φ, δηλαδή T(⌜φ⌝) ↔φ που είναι το σχήμα T. Αυτό σημαίνει, ότι αν θεωρήσουμε την PA (ή μια σχετική θεωρία) να είναι ω-συνεπής και πλήρης τότε δεν είναι συνεπής θεωρία. Αυτό αναφέρεται και στο θεώρημα του Tarski: **Η αριθμητική PA επεκταμένη κατά το σχήμα T είναι μη συνεπής.**

Με την ίδια μέθοδο, που κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει κάθε παράδοξο αυτοαναφοράς για να δείξει το θεώρημα του Tarski, μπορεί να χρησιμοποιήσει το παράδοξο αυτοαναφοράς για να δείξει το θεώρημα του Gödel .

Συνοψίζοντας, αν μια θεωρία είναι ω-συνεπής και πλήρης μας οδηγεί στο ότι το σχήμα T είναι ερμηνεύσιμο στην θεωρία. Δηλαδή μπορούμε να πάρουμε κάθε παράδοξο και να το τυποποιήσουμε στη θεωρία. Αλλά η τυποποίηση του παραδόξου παράγει μια λογική αντίφαση στη θεωρία και έτσι η θεωρία δεν μπορεί να είναι ω-συνεπής και πλήρης.

6.9 Ο φιλοσοφικός στόχος των θεωρημάτων μη πληρότητας

Γνωρίζουμε ήδη ότι η αναγωγή των μαθηματικών στη λογική είχε σαν στόχο να ελευθερώσει τα μαθηματικά από την Καντιανή εποπτεία. Οι πρωτεργάτες της αναγωγής των μαθηματικών στη λογική (Frege, Russell) δεν ήταν όμως φιλοσοφικά ουδέτεροι, ήταν πλατωνιστές όπως και ο Gödel (αν και ο ίδιος συναναστρεφόταν με ομάδα διανοουμένων γνωστή ως «Κύκλος της Βιέννης», με θετικιστικό φιλοσοφικό χαρακτήρα).

Παρακάτω αναφέρουμε κάποια στοιχεία της ζωής του Gödel σε σχέση με τον κύκλο αυτό αλλά και τις φιλοσοφικές θεωρήσεις του. Ο Gödel επηρεάστηκε πολύ από τη μελέτη συγγραμμάτων του Kant και του Russell. Αρχικά ο Gödel σχεδίαζε να σπουδάσει θεωρητική φυσική, όπως άλλωστε και ο Einstein (με τον οποίο διατήρησαν πολύχρονη φιλία και συνεργασία στο IAS, στο Princeton της Αμερικής) σχεδίαζε να σπουδάσει μαθηματικά. Οι παραδόσεις όμως των μαθημάτων των καθηγητών Fhillip Furtwanler και Hans Hahn, έστρεψαν το ενδιαφέρον του στα μαθηματικά. Ο Hahn και ο φιλόσοφος Moritz Schlick, δημιούργησαν μια ομάδα και μελετούσαν και συζητούσαν συγγράμματα του Ernst Mach, ενός υπέρμαχου του εμπειρισμού, ο οποίος πρέσβευε ότι τα πάντα μπορούν να εξηγηθούν με τη λογική και την εμπειρική παρατήρηση, χωρίς την προσφυγή σε μεταφυσικά μέσα. Η ομάδα αυτή εντάσσεται στο πλαίσιο του νεοθετικισμού και πιο συγκεκριμένα του λογικού θετικισμού, της πρώιμης δηλαδή φάσης του νεοθετικισμού, όπου η ύστερη φάση του είναι ο λογικός εμπειρισμός. Ως κυρίαρχα χαρακτηριστικά της φιλοσοφικής αυτής κίνησης, είναι η αντί-μεταφυσική της στάση, ο αντί-ψυχολογισμός, καθώς και η στροφή προς τα νεώτερα πορίσματα των φυσικών (κυρίως) επιστημών της εποχής.

Ο Gödel γνωρίστηκε με στοχαστές όπως ο φιλόσοφος Rudolf Carnap και ο μαθηματικός Karl Menger, ήλθε δε σε επαφή με τα συγγράμματα της σύγχρονης μαθηματικής λογικής και φιλοσοφίας. Ειδικότερα, ο «Κύκλος» εντρυφούσε στα συγγράμματα του Lundvig Wittgestein, του οποίου οι προβληματισμοί αναφέρονταν σε ποιο βαθμό είναι δυνατό η «γλώσσα να μιλήσει τη γλώσσα» και αυτό ενδέχεται να παρακίνησε τον Gödel να εξετάσει ανάλογα ερωτήματα για τα μαθηματικά.

Γενικότερα οι συντελεστές του «Κύκλου», αν και εκπροσωπούσαν διαφορετικές επιστήμες, συνέκλιναν ως προς την επιστημονική κοσμοαντίληψη που είχαν υιοθετήσει. Ο ρόλος της δραστηριότητας του «Κύκλου της Βιέννης» θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικός στην εξέλιξη της φιλοσοφίας της επιστήμης και της αναλυτικής φιλοσοφίας, ανεξάρτητα από τις όποιες αδυναμίες επισημάνθηκαν με το πέρασμα του χρόνου.

Ο Gödel όμως δεν υιοθέτησε τη θετικιστική φιλοσοφική αντίληψη του «Κύκλου». Αντίθετα ήταν Πλατωνιστής, πίστευε ότι εκτός από τα αντικείμενα, υπάρχει και ο κόσμος των ιδεών στον οποίο οι άνθρωποι έχουν πρόσβαση με τη βοήθεια της ενόρασης. Έτσι κατά τον Gödel μια πρόταση έχει μια ορισμένη τιμή αληθείας (αληθής ή ψευδής) ανεξάρτητα αν έχει αποδειχθεί, αν υπόκειται σε εμπειρική επαλήθευση ή διάψευση. Κατά την άποψή του, αυτή η φιλοσοφική θέση ήταν αρωγός στην αξιοσημείωτη μαθηματική ενορατική του δεινότητα.

Τα ΘΜΠ σίγουρα ταρακούνησαν το μαθηματικό κόσμο λόγω των καινοφανών μεθόδων αλλά κυρίως για τα αποτελέσματά τους. Βέβαια στα αποτελέσματα, αποδόθηκαν και αρνητικές σημασίες, όπως για παράδειγμα ο Herman Weyl (μαθητής του Hilbert και αργότερα υποστηρικτής της διαίσθησης), που έκανε λόγο για καταστροφή και πληγή του ιδανικού της αξιωματικής θεμελίωσης. Αλλά ο Gödel δεν ανακάλυψε κάποια δύσκολη ή αινιγματική πρόταση που δεν συμπεριλαμβανόταν στα θεωρήματα ενός τυπικού συστήματος. Αν αντίθετα ίσχυε αυτό, τότε θα υποδήλωνε , την ύπαρξη απόλυτα μη αποδείξιμων μαθηματικών προτάσεων, κάτι βέβαια που δεν πίστευε ούτε ο Gödel ούτε ο Hilbert.

Μια ακόμα παρόμοια αρνητική σημασία των αποτελεσμάτων των ΘΜΠ αποδίδεται και στον Dawson που γράφει [12], ότι ο Gödel απέδειξε ότι οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ήδη από την εποχή του Ευκλείδη δεν επαρκούν για να ανακαλυφθούν οι αλήθειες που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς. Συνεχίζει δε λέγοντας, ότι η ανακάλυψη που υπέσκαψε τα θεμέλια πάνω στα οποία χτίστηκε το οικοδόμημα των μαθηματικών ως τον 20ο αιώνα έδωσε το ερέθισμα για εναλλακτικές λύσεις. Όμως είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, ότι τα ΘΜΠ αφορούν τυπικά αξιωματικοποιήσιμα συστήματα καθώς και αξιωματική λογική. Μέχρι το 1899, η Αριθμητική και η γεωμετρία δεν είχαν αξιωματικοποιηθεί, μέχρι τους Frege, Russell η λογική δεν είχε αναπτυχθεί, κατά συνέπεια είναι δραματοποιημένη η παραπάνω περιγραφή του Dawson. Ο ίδιος βέβαια το αναγνωρίζει αυτό αναφέροντας [12]:

> Ο Gödel δεν θεώρησε ότι τα ΘΜΠ αποδεικνύουν την ανεπάρκεια της αξιωματικής μεθόδου, αλλά ότι η εξαγωγή θεωρημάτων δεν μπορεί να γίνει τελείως μηχανιστικά. Είχε την άποψη ότι τα θεωρήματά του δικαιώνουν τον ρόλο της ενόρασης στα μαθηματικά.

Αυτός είναι και ο φιλοσοφικός στόχος των ΘΜΠ. Κανείς δεν θα ήθελε να κάνει μαθηματικά περιοριζόμενος σε τυπικούς μηχανιστικούς κανόνες**. Η χαρά της απόδειξης, ή μιας λύσης είναι μεγάλη, αλλά η χαρά μιας απόδειξης πέρα από τα καθιερωμένα, δημιουργεί μεγάλη απήχηση.** Ο Hintikka αναφέρει τον Hilbert που όταν ρώτησε για ένα παλιό του φοιτητή που δεν ερχόταν πλέον στο πανεπιστήμιο και όταν έμαθε ότι στράφηκε στην λογοτεχνία είπε: ***«ο κακομοίρης δεν είχε αρκετή φαντασία για μαθηματικός και έγινε μυθιστοριογράφος»[33].***

Είναι σαφές ότι ο Gödel δεν υπέσκαψε τα θεμέλια πάνω στα οποία χτίστηκε το οικοδόμημα των μαθηματικών, δηλαδή τις παραδοσιακές αντιλήψεις που επικρατούσαν μέχρι τον 19ο αιώνα. Αντίθετα όπως αναφέρει ο ίδιος ο Gödel, φιλοσοφικά το θεώρημά του στρέφεται κατά της μηχανιστικής θεμελίωσης των μαθηματικών. Αναφέρει δε: *«Σε κάθε κόσμο που λειτουργεί με ορισμούς και με κανόνες, αν θέλει κάποιος να προχωρήσει μόνο με αυτούς, πάντα κάποιος προορισμός θα μένει απροσπέλαστος. Η αλήθεια θα μένει πάντα λειψή».*

[33] Hintikka, Jaako, "Hilbert Vindicated?", στο Language Truth and Logic, in Mathematics, Selected Papers, Kluer Academic, 1998

Επίλογος

Ουσιαστικά τα αποτελέσματα των θεωρημάτων του Gödel, τονίζουν ότι ποτέ δε θα καταφέρουμε να αποκτήσουμε πλήρη εποπτεία της μαθηματικής αλήθειας. Γενικότερα ο Gödel επέβαλλε κάποιου είδους περιορισμό, στο πρόγραμμα του Hilbert για έναν αλγόριθμο που θα είναι σε θέση να αποδεικνύει κάθε αληθή πρόταση μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα. Παράλληλα έδωσε ένα τέλος στην προσπάθεια πλήρους αξιωματοποίησης των βασικών μαθηματικών θεωριών όπως είναι η Αριθμοθεωρία και η Συνολοθεωρία. Ο Gödel έδειξε πως ότι είναι διαισθητικά βέβαιο, εκτείνεται πέρα από τις φορμαλιστικές μαθηματικές αποδείξεις, δηλαδή αυτές που προκύπτουν από αξιωματικά συστήματα για την περιγραφή μαθηματικών μεγεθών.

Υπήρχαν, όπως είδαμε, στις αρχές του 20ου αιώνα πολλές προσδοκίες από ορισμένες φιλοσοφικές σχολές να θεμελιωθούν τα μαθηματικά μηχανιστικά, γιατί έτσι θα αίρονταν όλοι οι κίνδυνοι εξαιτίας της εποπτείας. Αυτό που φιλοσοφικά δείχνουν τα ΘΜΠ είναι ότι υπάρχουν αντιφάσεις, οι οποίες προέρχονται από μεθόδους καθαρά μηχανιστικές, αλλά φαίνεται ότι η μηχανιστική φιλοσοφία δεν είναι τόσο στέρεα όσο θα περίμενε κανείς. Τα ΘΜΠ βάλλουν κατά της μηχανιστικής θεμελίωσης των μαθηματικών και κατά επέκταση δεν είναι αναγκαία η ύπαρξη ενός Η-Υ, που θα μπορούσε να απαριθμεί τις έγκυρες προτάσεις μιας μαθηματικής θεωρίας. Με δεδομένο τον Πλατωνισμό του Gödel, τα ΘΜΠ στηρίζουν πολύ πιο παραδοσιακές αντιλήψεις περί μαθηματικών.

Πηγές

1. Αναπολιτάνος, Δ. (2005). Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών. Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα
2. Αραγεώργης Αριστείδης: Γενικευμένη Μη Πληρότητα: Κατανόηση και Παρανόηση των Θεωρημάτων Μη Πληρότητας του Gödel, ανακτημένο στις 21-12-2014 από http://courses.arch.ntua.gr/fsr/140123/4.4.3%20Genikeymenh%20Mh%20Plhrothta%20(A.%20Aragevrghs).pdf
3. Βοσνιάδου, Σ. (2001). Εισαγωγή στη Ψυχολογία, Εκδόσεις Gutemberg.
4. Δρόσος Κ.(2007) Θέματα στις θεμελιώδεις έννοιες και τα θεμέλια των μαθηματικών, ηλεκτρονική έκδοση.
5. Τζουβάρας Αθανάσιος, Θεωρία Αναδρομικών Συναρτήσεων και Υπολογισιμότητας ανακτημένο στις 20-01-2015 από: http://users.auth.gr/~tzouvara
6. Χριστοδουλίδης, Π. (1993). Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Εκδόσεις Γ.Α .Πνευματικού, Αθήνα,
7. Benacerraf, P. (1967): “God, the Devil, and Gödel”, The Monist 51: 9-32
8. Bishop Errett (1967) Foundations of Constructive Analysis (New York, Mc Graw-Hill),
9. Bouveresse, J. (1999): Γοητευτικές και Παραπλανητικές Ακροβασίες της Φιλοσοφίας. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη, 2002
10. Chaitin, G. J. (1999), The Unknowable, Springer-Verlag, Singapore,
11. Davis Martin.(1965) The Undecidable. Raven Press,
12. Dawson John W., (1997) Logical dilemmas: the life and work of Kurt Godel. Wellesley, Mass,
13. Eves Howard (1997) Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics , Courier Corporation, 1997
14. Godel Kurt (1936), On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems,
15. Gödel, K. (1986). Collected works. Vol. I. Oxford University Press. Publications 1929-1936, Edited and with a preface by Solomon Feferman,

16. Hofstadter, D. (1979), Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid, Basic Books, New York,.
17. Hawking Stephen (2006) Στους ώμους των γιγάντων, εκδόσεις Τραυλός,
18. McGee, V. (1992). Maximal consistent sets of instances of Tarski's schema (T). Journal of Philosophical Logic,
19. Nagel E Newman J.R. (1991),. Το θεώρημα του Gödel, Τροχαλία,
20. Shapiro, S. (2000). Thinking About Mathematics, Oxford University Press, (Σκέψεις για τα Μαθηματικά, 2006), Η φιλοσοφία των Μαθηματικών. Πάτρα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
21. Smith Peter (2014) Gödel Without (Too Many) Tears, Second edition: revised draft, ανακτημένο στις 21-12-2014 από http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/gwt/GWT2f.pdf
22. Smullyan, R. (2001): "Gödel's Incompleteness Theorems" στο L. Goble (ed.), The Blackwell Guide to Philosophical Logic. Oxford: Blackwell,
23. Torkel Franzén (2005), Gödel's Theorem An Incomplete Guide to Its Use and Abuse , A K Peters Wellesley, Massachusetts
24. Turing Alan M., (1936) On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. Proceedinhs of the London Mathematical Society,.
25. Yourgrau Palle (2005) Ένας κόσμος χωρίς αύριο, εκδόσεις Τραυλός
26. Wang Hao (1987), Reflections on Kurt Gödel. Cambridge, Mass.: MIT Press,.
27. Wang Hao (1996), A Logical Journey: From Gödel to Philosophy. Cambridge, Mass.: MIT Press,.
28. Wilder R. L. (1986), Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών, Μετ. Δ. Ψυχογιός, εκδ. Π. Κουτσουμπός, Αθήνα,
29. Wittgenstein, L. (1958). Blue and Brown Books. Blackwell,
30. Wright Robert (1998), Three Scientists and Their Gods, New York: Times Books,

Ιστότοποι

31. http://summerofgodel.blogspot.gr/, ανακτημένο στις 5-03-2015
32. http://plato.stanford.edu/entries/hobbes/ , ανακτημένο στις 12-06-2015
33. http://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/#FirIncTheCom ανακτημένο στις 10-07-2015