ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ.

Αιμίλιος Βλάστος, Μαθηματικός MSc, στο Μουσικό Σχολείο Καρδίτσας
Σκοτίδας Σωτήριος , Μαθηματικός , M.ed. Διδακτικής, 2ο ΓΕΛ Καρδίτσας,

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή γίνεται μια μελέτη εφαρμογών των συνεχών συναρτήσεων σε κλειστό διάστημα. Σε παραγώγους συναρτήσεις που είναι ασυνεχείς, με τη βοήθεια του θεωρήματος του Darboux, αναδεικνύεται αρχικά ότι η ασυνέχεια σ' ένα σημείο x_0 είναι ιδιαίτερης περίπτωσης και δεν εμποδίζει την εφαρμογή του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών. Στη συνέχεια της εργασίας το θεώρημα Darboux γίνεται σπουδαίο εργαλείο μελέτης προτάσεων του Διαφορικού Λογισμού.

ABSTRACT

This paper studies the use of continuous functions in closed intervals. In derivative functions, it is proved that the discontinuity at a point x_0 is of a special kind and does not hinder the use of the intermediate value theorem. In this paper the Darboux's theorem is seen as a significant way to study some propositions of the Differential calculus.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Ανάλυση αποτελεί το πιο ισχυρό και τελείως απαραίτητο εργαλείο για κάθε σε βάθος εξέταση προβλημάτων που απασχολούν σήμερα εκτός από τα Μαθηματικά, τη Φυσική, τη Τεχνολογία, τη Βιολογία, την Ιατρική, την Οικονομία, τις Κοινωνικές Επιστήμες. (Παντελίδης, Γ., 1998).

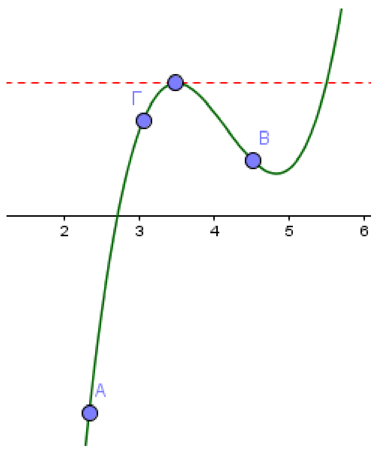
Όπως προκύπτει από πολλές διεθνείς έρευνες, οι περισσότεροι μαθητές τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση παρουσιάζουν προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης που έχουν διδαχθεί. Πολλές παρανοήσεις που έχουν σχετικά με τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας κ.α. τους δημιουργούν σοβαρά εμπόδια στη συνέχεια των σπουδών τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται την Ανάλυση ως μια σειρά δεξιοτήτων που απαιτείται ώστε να μπορούν να λύσουν ασκήσεις χρησιμοποιώντας γνωστές μεθόδους. Σπάνια τους ζητείται να εμπλακούν με προβλήματα που δεν τους είναι εκ των προτέρων γνωστός ο τρόπος επίλυσης τους. Οι περισσότερες ασκήσεις των σχολικών βιβλίων μπορούν να αντιμετωπιστούν με επιφανειακές γνώσεις χωρίς να απαιτείται κάποια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση. (Calgeo, 2007). Σε αυτό το πλαίσιο, ίσως βοηθούσε τη διδακτική διαδικασία η παράθεση κάποιων προβληματισμών σχετικά με τη φαινομενική ασυνέπεια υποθέσεων – συμπεράσματος, με χαρακτηριστικό παράδειγμα το Θεώρημα Darboux (ή αλλιώς Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών της Παραγώγου Συνάρτησης).

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX

Ας δούμε πως η προσπάθεια απόδειξης μιας πρότασης με χρήση γνωστών τεχνικών και θεωρημάτων της Ανάλυσης Λυκείου οδηγεί στην ανάδειξη του Θεωρήματος Darboux ως χρήσιμο εργαλείο.

Πρόταση 1 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και όχι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ, τότε υπάρχει $k \in \Delta$ ώστε $f'(k) = 0$

Διαισθητικά με προσέγγιση σχήματος, όπως και να ενώσει κανείς τα τρία σημεία Α, Β, Γ χρησιμοποιώντας παραγωγίσιμη και μη μονότονη συνάρτηση, εύκολα θα βρεθεί σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον x΄x. (σχήμα1)



Απόδειξη Αφού η f δεν είναι γνησίως μονότονη θα υπάρχουν α, β, γ $\in \Delta$ με α < γ < β ώστε f(γ)> f(β)> f(α).

α΄ τρόπος Η f στο [α, β] παρουσιάζει ΟΕ και ΟΜ. Επειδή όμως η τιμή f(γ) είναι μεγαλύτερη από τις f(α), f(β) τότε το ΟΜ η f δεν το παρουσιάζει στα άκρα α, β αλλά στο εσωτερικό του (α, β), έστω στο k. Τότε όμως η f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό k, στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο, άρα $f'(k) = 0$ από το θεώρημα Fermat.

β΄ τρόπος Σύμφωνα με το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών επειδή η f συνεχής, το f(β) είναι ενδιάμεση τιμή των f(α), f(γ) τότε θα υπάρχει λ $\in$ (α, β) ώστε f(λ)=f(β). Επίσης από το θεώρημα Rolle, επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα [α, λ], παραγωγίσιμη στο (α, λ) τότε θα υπάρχει k $\in$ (α,λ) ώστε $f'(k) = 0$.

γ΄ τρόπος Ένας τρίτος τρόπος στηρίζεται στην ιδέα εφαρμογής του Θεωρήματος Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα [α, γ], [γ, β] : $f'(\delta) = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} > 0$ και $f'(\varepsilon) = \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta} < 0$ όπου δ, ε ανήκουν στα (α, γ) , (γ, β) αντίστοιχα. Είναι $f'(\delta) \cdot f'(\varepsilon) < 0$, οπότε αν η f' ήταν συνεχής τότε $f'(k) = 0$ από το θεώρημα Bolzano.

Όμως τελικά δεν απαιτείται η συνέχεια της f' για να είναι έγκυρος αυτός ο τρόπος, όπως φαίνεται στις επόμενες δύο προτάσεις.

Πρόταση 2 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [δ, ε] με $f'(\delta) \cdot f'(\varepsilon) < 0$, τότε υπάρχει k $\in$ (δ, ε), ώστε $f'(k) = 0$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $f'(\delta) > 0$ και $f'(\varepsilon) < 0$, τότε για δ<x <δ+λ, λ>0 οσοδήποτε μικρό: $\lim_{x\to\delta^+}\frac{f(x)-f(\delta)}{x-\delta} > 0$, οπότε f(x) - f(δ) > 0 και για ε+λ<x < ε: $\lim_{x\to\varepsilon^-}\frac{f(x)-f(\varepsilon)}{x-\varepsilon} < 0$, οπότε f(x) - f(ε) > 0.

Έτσι για κάθε x∈[δ, ε] είναι f(x) $\geq f(\delta)$ και f(x) $\geq f(\varepsilon)$. Λόγω των παραπάνω σχέσεων στο [δ,ε] η f δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο στα άκρα δ, ε, οπότε θα το παρουσιάζει στο εσωτερικό k, οπότε λόγω του Θεωρήματος Fermat θα είναι $f'(k) = 0$.

Το Θεώρημα Darboux Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [α, β] και $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$ Αν n είναι αριθμός ανάμεσα στις τιμές f΄(α), f΄(β) τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ∈(α,β) τέτοιος ώστε f΄(ξ) = n.

<u>Απόδειξη</u> Έστω f΄(α)< n < f΄(β), τότε f΄(α) – n < 0 < f΄(β) - n, δηλαδή h΄(α)<0<h΄(β), όπου h(x) = f(x) – nx οπότε από την παραπάνω Πρόταση 2, υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιος ώστε h΄(ξ)=0, έτσι f΄(ξ)= n

Ας δούμε τώρα σαν παράδειγμα μια άσκηση που αντιμετωπίζεται και με το θεώρημα Darboux

<u>Άσκηση 1</u>

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$, για την οποία ισχύουν: f (0)=0, f(1) = 1/2 και $f'(0) > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈ $(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi$

<u>Διαδικασία προσέγγισης της λύσης</u>

Θεωρούμε την φ(x)=f(x) - x^2 με παράγωγο φ΄(x) = f΄(x) - 2x και x ανήκει στο [0,1]. Τότε φ(0)=0, φ(1)= - ½, φ΄(0)=f΄(0) > 0, άρα το όριο του λόγου μεταβολής της φ είναι θετικό, οπότε φ(x)>0 κοντά στο 0, άρα υπάρχει k>0 (κοντά στο μηδέν) ώστε φ(κ)>0 α΄ τρόπος Είναι φ(0)=0, φ(κ)=λ>0, φ(1)= - ½, οπότε με 0<κ<1 είναι φ(1)<φ(0)<φ(κ), άρα η φ δεν είναι γνησίως μονότονη και βάσει της πρότασης 1 θα είναι φ΄(ξ)=0, $\xi \in (0,1)$

β΄ τρόπος Έστω $\varphi(x) = f(x) - x^2$ με $\varphi'(x) = f'(x) - 2x$. Είναι $\varphi'(0) > 0$, παίρνοντας ΘΜΤ στο [0,1]: $\varphi'(x_0) = \frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0} < 0$ και από το Θ. Darboux στο $(0, x_0)$ υπάρχει ξ στο $(0, x_0)$ ώστε φ΄(ξ)=0.

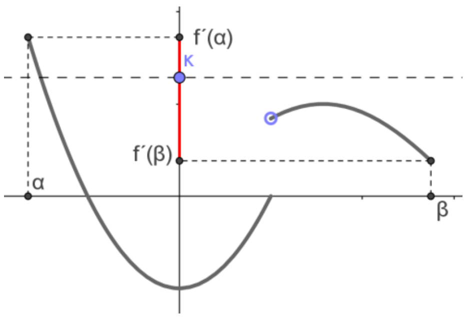
Πρόταση 3 Αν ισχύει $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in \Delta$ (διάστημα), τότε η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Απόδειξη Πράγματι, αρκεί η $f'(x)$ να διατηρεί σταθερό πρόσημο, κάτι το οποίο αληθεύει, αφού σε αντίθετη περίπτωση (αν δηλ. η παράγωγος έπαιρνε ετερόσημες τιμές) από το Θεώρημα Darboux η $f'(x)$ θα είχε ρίζα, άτοπο.

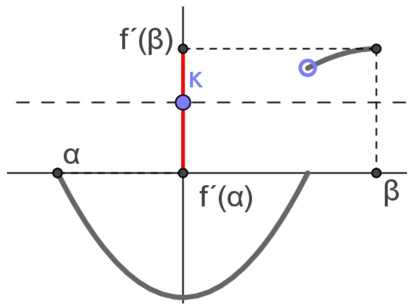
Ακόμα, με το Θ. Darboux μπορεί να αποδειχθεί και το σπουδαίο Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών των Συνεχών Συναρτήσεων.

Πράγματι, αν f συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και καθώς η f έχει αρχική έστω την F (πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού), τότε από το Θ. Darboux η $F'(x) = f(x)$ θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $F'(\alpha) = f(\alpha)$, $F'(\beta) = f(\beta)$

Ένα ερώτημα που μπορεί να τεθεί στο θεώρημα Darboux είναι πως η παράγωγος της f μπορεί να παίρνει τις ενδιάμεσες τιμές των f΄(α),f΄(β) χωρίς την προϋπόθεση η f΄ να είναι συνεχής. Στο παρακάτω σχήμα 2, η μη συνεχής στο x_o συνάρτηση στο κλειστό διάστημα [α,β] παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές, ενώ στο σχήμα 3 δεν τις παίρνει.



σχήμα2



σχήμα3

Πως όμως εξηγείται η έλλειψη της φαινομενικά απαραίτητης συνθήκης της συνέχειας της παραγώγου συνάρτησης (για να έχουμε ισχύ του συμπεράσματος); Η απάντηση δίνεται στις παρακάτω προτάσεις, όπου και αιτιολογείται ότι δεν μπορεί οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις να αντιστοιχούν σε παραγώγους συναρτήσεις.

Πρώτα όμως ας δούμε κάποιους ορισμούς που αφορούν την ασυνέχεια συνάρτησης.

Ορισμός 1 Η f έχει αιρούμενη ασυνέχεια στο x_0 όταν τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι ίσα, και διαφορετικά από το $f(x_0)$.

Ορισμός 2 Η f έχει απλό είδος ή άλμα ασυνέχειας στο x_0, όταν τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Ορισμός 3 Η f έχει θεμελιώδη ασυνέχεια στο x_0, όταν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι άπειρο (α΄ μορφή) ή όταν δεν υπάρχει ένα τουλάχιστο πλευρικό όριο στο x_0 (β΄μορφή).

Πρόταση 4 Αν η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Α τότε η $\varphi'(x)$ δεν μπορεί να έχει απλό είδος ασυνέχειας, ούτε αιρούμενη ασυνέχεια στο Α.

Απόδειξη Έστω η φ΄(x) έχει απλό είδος ασυνέχειας στο $\kappa \in A$, τότε είτε $\lim_{x\to\kappa^+} \varphi'(x) \neq \varphi'(\kappa)$ είτε $\lim_{x\to\kappa^-} \varphi'(x) \neq \varphi'(\kappa)$.

Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x\to\kappa^+} \varphi'(x) > \varphi'(\kappa)$, τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε $\lim_{x\to\kappa^+} \varphi'(x) > \lambda > \varphi'(\kappa)$, τότε υπάρχει δ>0, οσοδήποτε μικρό ώστε

$\varphi'(x) > \lambda > \varphi'(\kappa) \quad (1) \quad \forall x \in (\kappa, \kappa + \delta)$, οπότε $\varphi'\left(\kappa + \frac{\delta}{2}\right) > \lambda > \varphi'(\kappa)$ και σύμφωνα με το Θ. Darboux: υπάρχει $\rho \in (\kappa, \kappa + \frac{\delta}{2})$ ώστε $\varphi'(\rho) = \lambda$, άτοπο λόγω της (1).

Πρόταση 5 Αν η φ(x) είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Α τότε η φ΄(x) δεν μπορεί να έχει το θεμελιώδες είδος ασυνέχειας α΄μορφής στο Α, όπου ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια είναι μη πεπερασμένο.

Απόδειξη $\lim_{x\to\kappa^+} \varphi'(x) = +\infty \neq \varphi'(\kappa)$ είτε $\lim_{x\to\kappa^-} \varphi'(x) = -\infty \neq \varphi'(\kappa)$. Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x\to\kappa^+} \varphi'(x) = +\infty > \varphi'(\kappa)$, τότε υπάρχει υπάρχει αριθμός λ οσοδήποτε μεγάλος και δ>0 οσοδήποτε μικρός ώστε $\varphi'(x) > \lambda > \varphi'(\kappa)$ για κάθε $\forall x \in (\kappa, \kappa + \delta)$. Οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη απόδειξη.

Πρόταση 6 Αν η φ(x) είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Α και η φ΄(x) είναι ασυνεχής στο x_0, τότε ένα τουλάχιστο από τα πλευρικά όρια στο x_0 δεν υπάρχει.

Απόδειξη Άμεση συνέπεια των προτάσεων 4, 5

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν η παράγωγος συνάρτηση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης είναι ασυνεχής σε ένα διάστημα, τότε δεν μπορεί να έχει ασυνέχεια πρώτου είδους, καθώς τότε μπορεί να είχαμε ένα κενό στις τιμές $f'(x)$.

Ορίζουμε τώρα την ιδιότητα Darboux.

Ορισμός 4 Η συνάρτηση d ορισμένη στο ανοικτό διάστημα Δ έχει την ιδιότητα Darboux όταν για κάθε $\alpha,\beta \in \Delta$ με $\alpha<\beta$, αν $d(\alpha)<\mu< d(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $d(\xi)=\mu$.

Αν μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο Δ, τότε είναι φανερό ότι η g έχει την ιδιότητα Darboux, αφού ισχύει για αυτή το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Επίσης η g ως συνεχής στο Δ έχει αρχική συνάρτηση.

Υπάρχουν συναρτήσεις φ μη συνεχείς στο x_0 που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά είναι αναγκαίο να έχουν αρχική Φ, δηλαδή $\varphi=\Phi'$. Η ασυνέχεια στο x_0 όπως αναφέρθηκε παραπάνω πρέπει να είναι θεμελιώδης και ειδικότερα να μην υπάρχει κανένα από τα πλευρικά όρια στο x_0. Ένα παράδειγμα ασυνεχούς παραγώγου συνάρτησης με την ιδιότητα Darboux αφορά τη συνάρτηση $\varphi(x)= x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και $\varphi(0) = 0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο R, αφού $\varphi'(x)=2x\eta\mu\frac{1}{x}$ - $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και $\varphi'(0)= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x}=0$

Η φ΄ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού δεν υπάρχει το όριό της στο 0. Πράγματι αν υπήρχε και ήταν L τότε επειδή το όριο της $f(x)=- 2x\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι μηδέν στο 0 τότε και το όριο στο 0 του αθροίσματος των φ΄ και f(x) θα είναι L, δηλαδή η συνάρτηση $h(x)= - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ θα έχει στο 0 όριο το L, άτοπο.

Ας δούμε τώρα κάποιες ακόμα σημαντικές συνέπειες του Θ. Darboux

Πρόταση 7 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που περιέχει το μηδέν και ισχύει $\lim_{x\to 0} f'(x) = L$ τότε αναγκαστικά $L = f'(0)$

<u>Απόδειξη</u> Έστω αντίθετα ότι $L \neq f'(0)$, ας είναι $L < f'(0)$. Τότε για κάθε ε>0 θα υπάρχει δ>0 ώστε για κάθε x με $0<|x-0|<\delta$ να ισχύει $|f'(x) - L| < \varepsilon$ (1) . Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{f'(0)-L}{2}$. Για $x = \delta/_2$ η (1) δίνει $f'\left(\delta/_2\right) < \frac{L+f'(0)}{2} < \frac{f'(0)+f'(0)}{2} = f'(0)$. Έτσι από το Θ. Darboux υπάρχει $\alpha \in \left(0, \delta/_2\right)$ ώστε $f'(\alpha) = \frac{L+f'(0)}{2}$. Αλλά από (1) έχουμε $|f'(\alpha) - L| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow |f'(\alpha) - L| < \frac{f'(0)-L}{2} \Leftrightarrow \frac{f'(0)-L}{2} < \frac{f'(0)-L}{2}$, άτοπο.

β τρόπος: Αν $L \neq f'(0)$ τότε η f ασυνεχής στο xο οπότε σύμφωνα με τη πρόταση 6 το όριο L δεν υπάρχει, άτοπο.

Πρόταση 8 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και η f' δεν είναι σταθερή, τότε το $f'(I)$ είναι διάστημα.

<u>Απόδειξη</u> Αφού η f' δεν είναι σταθερή θα υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in I$ ώστε $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ και φυσικά $f'(x_1), f'(x_2) \in f'(I)$. Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ξ μεταξύ των $f'(x_1), f'(x_2)$ θα είναι $\xi \in f'(I)$. Αλλά από Θ. Darboux υπάρχει $\alpha \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\alpha) = \xi$

Συμπεράσματα

Ο Απειροστικός λογισμός είναι το κυρίαρχο εργαλείο σκέψης και ανάπτυξης στα μαθηματικά, η συνέχεια δημιουργεί μια κλάση συναρτήσεων με παράστασή της στο χώρο της Ανάλυσης. Η ασυνέχεια μιας συνάρτησης δημιουργεί την αίσθηση του άλματος που ενδεχομένως κάνει η γραφική παράσταση με συνέπεια να μην ισχύουν βασικά θεωρήματα της Ανάλυσης όπως το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών. Όταν όμως η ασυνέχεια αφορά την παράγωγο της συνάρτησης, τότε τα πράγματα αλλάζουν δραματικά. Αυτό γιατί η παράγωγος μιας συνάρτησης μερικές φορές έχει ισχυρότερες ιδιότητες από την ίδια τη συνάρτηση. Η ασυνέχεια της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 «τιθασεύεται» και γίνεται μιας συγκεκριμένης μορφής, επίσης δεν δημιουργεί εμπόδιο ώστε να

ισχύει για αυτήν το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.
Το θεώρημα Darboux στο οποίο στηρίζονται τα παραπάνω συμπεράσματα, είναι ένα ισχυρό εργαλείο για α) μια εννοιολογική εκγύμναση και κατανόηση εννοιών όπως το όριο και η συνέχεια συνάρτησης β) για την απόδειξη άλλων προτάσεων. Για τους παραπάνω λόγους θα μπορούσε το θεώρημα αυτό να χρησιμοποιείται περισσότερο στο χώρο της Ανάλυσης σε επίπεδο Λυκείου.

Βιβλιογραφία

Calgeo : *«Διδασκαλία της Ανάλυσης με χρήση Εργαλείων Δυναμικής Γεωμετρίας»* (www.math.uoa.gr/calgeo)

Lars Olsen,(2004) *A New Proof of Darboux's Theorem* , The American Mathematical Monthly , Vol. 111, No. 8 (Oct., 2004), pp. 713-715

Spivac M., 1995. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ. , Γιαννακούλιας Ε. (1995). *Απειροστικός Λογισμός*, Εκδόσεις Αίθρα

Ντούγιας, Σ.,(2007). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Εκδόσεις Leader Books

Ντρίζος, Δ. (2016) *Στοχεύοντας στην ανάπτυξη μιας «διερευνητικής τάξης» στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο λύκειο*, Ευκλείδης Γ΄ τχ. 85 (Ιούλιος – Αύγουστος 2016) Αθήνα: Έκδοση της ΕΜΕ

Παντελίδης, Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα της Ανάλυσης Γ΄ Λυκείου*. Αθήνα: Εκδόσεις Ζήτη.